เรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอน 3

การหมุนและกลิ้งในระนาบ

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล 15 ตุลาคม 2555

เมื่อประมาณสิบกว่าปีก่อนในการอบรมครูฟิสิกส์ ผมถามครูที่มาอบรมว่าหัวข้อใดหรือเรื่องใดที่รู้สึกว่าไม่เข้าใจที่สุด มีคุณครูสองคนซึ่งทั้งคู่เป็นครูที่สอนมานานหลายปีและเป็นผู้ที่สนใจศึกษาวิชาฟิสิกส์ที่ตนสอน หนึ่งในนั้นคืออาจารย์นิพนธ์ ปรุงเหล็ก โรงเรียนสุราษฎร์พิทยา ซึ่งต่อมาได้เป็นอาจารย์ผู้ควบคุมทีมฟิสิกส์ ศูนย์ สอวน. มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ ตอบผมว่าเรื่องการหมุนและกลิ้งเป็นเรื่องที่อ่านมาหลายรอบแล้วก็ยังไม่เข้าใจ ผมจึงตอบไปว่าอ่านอย่างไรก็ไม่เข้าใจหรอกครับ เพราะหนังสือที่ท่านอ่านนั้นเขาเขียนเพื่อให้ดูง่าย ผลที่ตามมาคือผู้อ่านที่ช่างคิดหน่อยจะมีข้อสงสัยมากมายซึ่งไม่สามารถตอบได้ แม้ในหนังสือฟิสิกส์ระดับปี 1 มหาวิทยาลัยที่ได้รับความนิยมในบ้านเราเช่น Serway ,Young & Freedman เขาก็เขียนเพื่อให้ดูง่าย ถ้าเราไปอ่านวารสารทางการศึกษาก็จะเห็นว่ามีการวิจารณ์แนวการเขียนเรื่องการหมุนและการกลิ้งของหนังสือเหล่านี้ว่าอาจทำให้เกิดความสับสน ตัวอย่างเช่น “Angular Momentum and Angular Velocity” ของ Herman Erlichson , The Physics Teacher Vol.32.May 1994 วิจารณ์ว่าการเขียนว่า $\vec{L} = I\vec{\omega}$ นั้น โดยปกติแล้วไม่เป็นความจริง แต่องค์ประกอบของโมเมนตัมเชิงมุมในแนวทิศของความเร็วเชิงมุมเท่ากับ $I\,\omega$ จริงเสมอ

ต่อมาผมได้เขียนหนังสือกลศาสตร์ ได้ตั้งใจว่าจะเขียนเรื่องการหมุนและกลิ้ง(ในระนาบ) ให้ชัดเจน แต่ไม่ต้องการให้ยากเกินไป จึงได้ใช้วิธีดูๆเอาจากตำราฝรั่ง (เฉพาะที่เป็นการหมุนและกลิ้งในระนาบ) แล้วเอามาผสมกัน ซึ่งมันมีกรณีหนึ่งที่ผมสงสัยคือเรื่องการกลิ้งโดยไม่ไถลของทรงกระบอก (หรือทรงกลม) ว่านอกจากแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลแล้ว ทำไมจึงใช้สมการ $\tau = I\alpha$ กับแกนที่ผ่านจุดสัมผัสได้ด้วย ผมก็เที่ยวไปค้นหาดูเหตุผลของคนอื่น(ของฝรั่ง) หลายคนเขาให้เหตุผลว่าเป็นเพราะมันเป็นแกนที่อยู่นิ่ง(ชั่วขณะ) จึงใช้ได้ ผมคิดว่าน่าจะเป็นเหตุผลที่ถูกต้องจึงได้อ้างเช่นเดียวกัน

หลังจากหนังสือเสร็จเรียบร้อยแล้ว เมื่อเวลาผ่านไปอีกได้เจอหนังสือเล่มหนึ่งคือ Analytical Mechanics ของ Fowles&Cassiday (ก็ฝรั่งอีกนั่นแหละ) เขาให้เหตุผลว่าที่ใช้แกนที่ผ่านจุดสัมผัสได้เพราะแกนนี้มีความเร่งผ่านจุดศูนย์กลางมวล ผมถึงกับตลกตัวเองที่มองข้ามเรื่องง่ายๆคือ จุดที่อยู่นิ่ง (ชั่วขณะ) ไม่ได้หมายความว่าความเร่งของมันต้องเป็นศูนย์

ต่อมาอีกหลายปี ในการแข่งขันฟิสิกส์โอลิมปิกระดับชาติที่เชียงใหม่ ในห้องประชุมข้อสอบก็มีการพิจารณากันว่าจะใช้แกนที่ผ่านจุดสัมผัสนี้ได้หรือไม่ ซึ่งในตอนแรกนั้นผมไม่ได้แสดงความเห็น แต่สุดท้ายก็แสดงความเห็นไปว่าใช้ได้ เพียงแต่บรรยากาศขณะนั้นค่อนข้างเคร่งเครียดจึงไม่ได้บอกไปว่าผมนี่แหละที่ให้เหตุผลของการใช้ได้แบบผิดๆมาแล้ว

มาในปี 2555 นี้ ซึ่งเป็นปีที่มีศูนย์โรงเรียนขยายผล สอวน. แต่ในค่าย 1 ของฟิสิกส์นั้นไม่มีการสอนการหมุนและการกลิ้ง ในที่ประชุมศูนย์ สอวน. ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศิลปากร มีความเห็นกันว่ามันออกจะขาดๆหายๆ จึงตกลงกันว่าศูนย์เราจะสอนการหมุนและการกลิ้ง โดยให้ผมเป็นผู้สอน จึง

ได้รำลึกถึงความหลังดังที่ได้เล่ามา ในคราวนี้เนื่องจากนักเรียนที่เข้าค่ายเป็นนักเรียนที่คัดมาแล้ว จึงจะสอนแบบให้มีพื้นฐานเรื่องการหมุนติดตัวไป ไม่หลีกเลี่ยงความยาก เพราะการหลีกเลี่ยงทำให้เกิดปัญหาตามมามากมายสำหรับผู้ที่ช่างสงสัย โดยการหาที่มาของสมการ $\tau = I\alpha$ ผมใช้วิธีมาตรฐานที่ใช้หาสมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์ เพียงแต่จำกัดให้ทิศของความเร็วเชิงมุมคงที่ และไม่ใช้ principal axes ซึ่งวิธีนี้แม้ดูจะอืดอาดยืดยาด แต่มันน่าจะเป็นวิธีที่รัดกุม ได้แนวความคิด(concept) และ สามารถตอบคำถามที่คนมักสงสัยได้หลายอย่าง โดยผมพยายามเขียนให้อ่านได้ง่าย พอเขียนแล้วก็เลยคิดว่าเอามาลงในเว็บไซต์ของภาควิชาก็น่าจะเป็นประโยชน์โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับศูนย์โรงเรียนขยายผล สอวน. ใครรู้จักศูนย์ใดก็ช่วยบอกให้ครูศูนย์นั้นมาอ่านหน่อยครับ หรือจะพิมพ์แจกกันต่อๆไปก็ได้ ต่อไปท่านอาจเปลี่ยนใจนำเอาเนื้อหาการหมุนและการกลิ้งในระนาบลงในหลักสูตรของค่าย 1 โดยส่วนตัวผมนั้นผมเชื่อว่ามีครูที่มีศักภาพมากมายหลายคน เพียงแต่ท่านอาจจะไม่ค่อยมั่นใจ หรือไม่อยากจะเสียเวลาคิดโจทย์เพิ่มเติม แต่ถ้าจำเป็นต้องทำแล้วผมเชื่อว่าท่านทำได้

อีกเรื่องหนึ่งที่ผมรู้สึกว่าศูนย์โรงเรียนขยายผลอาจมีความรู้สึกไม่มั่นใจคือแคลคูลัส ซึ่งผมเคยแสดงความคิดเห็นไว้นานแล้วว่าสำหรับแคลคูลัสที่เราใช้งานในวิชาฟิสิกส์นั้นไม่ได้ยากเลย จึงตั้งใจว่าจะเขียนแคลคูลัสฉบับย่อสั้นๆให้ตรงประเด็นที่ใช้ รวมทั้งบางแง่มุมของเวกเตอร์ที่เราใช้ในฟิสิกส์ในเว็บไซต์นี้ (เขียนบอกไว้เพื่อเป็นการบังคับตนเองให้เขียน)

รูปบางรูปเขียนจุดลงในรูปไม่ได้ และตัวเลขในการคำนวณอาจมีความผิดพลาดก็ขออภัยด้วยนะครับ

เอกสารฉบับนี้จัดเตรียมเพื่อนักเรียนค่าย สอวน.ฟิสิกส์ศิลปากร โดยยึดแนวว่า

1) นักเรียนในค่ายนี้ผ่านการคัดตัวมาแล้วจึงเป็นผู้มีศักยภาพดี จึงน่าจะเป็นผู้ที่ช่างคิดช่างสงสัย และอาจมีนักเรียนในค่ายนี้ที่จะศึกษาต่อสาขาฟิสิกส์ในระดับปริญญาตรี ซึ่งจะต้องเรียนการหมุนใน 3 มิติซึ่งอาจนับได้ว่าเป็นเรื่องที่มีความยุ่งยากซับซ้อนที่สุดของวิชากลศาสตร์ แม้การหมุนแบบที่นักเรียนจะได้เรียนในค่ายนี้(และในโรงเรียน)เป็นการหมุนแบบง่ายที่สุดที่เรียกว่าการหมุนและการกลิ้งในระนาบ แต่ก็ยังคงเป็นเรื่องค่อนข้างซับซ้อน ตำราโดยทั่วไปจึงพยายามเขียนให้ง่าย แต่กลับทำให้ผู้เรียนที่ช่างสงสัยมีข้อขัดแย้งหลายอย่าง เอกสารฉบับนี้ต้องการให้แนวความคิดพื้นฐานจึงต้องใช้แคลคูลัสและเวกเตอร์ตามที่จำเป็น ซึ่งนักเรียนจะพบว่าจริงๆแล้วคณิตศาสตร์เหล่านี้เฉพาะในส่วนที่เรานำมาใช้กับกลศาสตร์นั้น ไม่ได้มีความยุ่งยากเกินความสามารถของนักเรียนเลย

2) เนื่องจากเวลาสอนมีเวลาจำกัด การสอนจะสอนแบบสรุปประเด็นที่สำคัญ การพิสูจน์ส่วนใหญ่จะเขียนไว้ในภาคผนวกให้นักเรียนอ่านเอง

การหมุนและการกลิ้งในระนาบ

อาจกล่าวได้ว่าการหมุนและการกลิ้งเป็นการเคลื่อนที่เชิงมุม (การกลิ้งคือการหมุนบวกกับการเลื่อนที่) ปริมาณที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่เชิงมุมบางปริมาณนิยามเทียบกับจุด บางปริมาณนิยามเทียบกับแกน จุดหรือแกนที่ใช้อ้างอิงนี้เรียกว่า “จุดหมุน” หรือ “แกนหมุน” ข้อแตกต่างที่เห็นได้ชัดอย่างหนึ่งระหว่างการเคลื่อนที่เชิงมุมและการเคลื่อนที่เชิงเส้น (การเลื่อนที่) คือ ปริมาณที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่เชิงมุมมักขึ้นกับจุดหมุนหรือแกนหมุน เมื่อจุดหมุนหรือแกนหมุนเปลี่ยนไป ปริมาณเหล่านี้มักจะเปลี่ยนไปด้วย ดังนั้น จึงมีความยุ่งยากมากกว่าการเคลื่อนที่เชิงเส้น ในเอกสารนี้จะกล่าวเฉพาะการหมุนและการกลิ้งในระนาบซึ่งเป็นการหมุนที่จุดใดๆในวัตถุเคลื่อนที่ในระนาบอันหนึ่งหรือก็คือการหมุนและกลิ้งแบบไม่มีการเลี้ยว ทิศของความเร็วเชิงมุมอยู่ในแนวเดิมตลอดซึ่งเป็นการหมุนแบบง่าย การหมุนแบบยากคือการหมุนใน 3 มิตินั้น นักเรียนจะได้เรียนในระดับมหาวิทยาลัย

เราจะกล่าวถึงปริมาณที่ใช้บรรยายการหมุนและการกลิ้งกันก่อน

1)ความเร็วเชิงมุม

ความเร็วเชิงมุมเป็นปริมาณที่อ้างอิงเทียบกับแกน เมื่อเรากล่าวว่าวัตถุหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ϖ รอบแกนหนึ่ง หมายความว่าทุกๆส่วนของวัตถุนี้หมุนรอบแกนดังกล่าวด้วยความเร็วเชิงมุมเดียวกัน หน่วยของความเร็วเชิงมุมเป็นเรเดียน/วินาที ทิศของความเร็วเชิงมุมเราตกลงกันว่าให้เป็นไปตามกฎมือขวา คือเมื่อวัตถุหมุนให้ใช้มือขวากำให้นิ้วทั้ง 4 คือนิ้วชี้ กลาง นาง ก้อย ไปตามทิศของการหมุน ทิศที่หัวแม่มือชี้ให้เป็นทิศของความเร็วเชิงมุม ตัวอย่างเช่นนาฬิกาที่แขวนติดผนัง ความเร็วเชิงมุมของเข็มวินาทีเท่ากับ $\pi / 30$ เรเดียน/วินาที ทิศพุ่งเข้าไปในผนัง

นอกจากจะมีทั้งขนาดและทิศ(จากการกำหนด) ทำให้เราแทนความเร็วเชิงมุมได้ด้วยลูกศรแล้วเรายังพิสูจน์ได้ว่าลูกศรของความเร็วเชิงมุมนี้ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยถ้าวัตถุชิ้นหนึ่งมีการหมุนรอบแกน 2 แกนพร้อมๆกัน (โดยแกนทั้งสองต้องตัดกัน) การหมุนรอบ 2

แกนนี้เทียบเท่ากับการหมุนรอบแกนๆเดียว ซึ่งหาได้จากกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน[#] ดังนั้นความเร็วเชิงมุมจึงเป็นเวกเตอร์ เราสามารถใช้พีชคณิตและแคลคูลัสของเวกเตอร์กับความเร็วเชิงมุมได้

มีประเด็นสำคัญอันหนึ่งที่นักเรียนควรเข้าใจคือ *ในกรณีของวัตถุแข็งเกร็ง*นั้น ถ้าวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนๆหนึ่ง สมมติเป็นแกน AB ด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ เราอาจมองได้ว่าวัตถุนี้หมุนรอบแกนอื่นๆนับไม่ถ้วนแกนซึ่ง*ติดไปกับวัตถุ*และ*ขนาน*กับแกน AB โดยวัตถุหมุนรอบแกนเหล่านี้ด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ เดียวกัน คือเท่ากันทั้งขนาดและทิศ

นักเรียนอาจเข้าใจความจริงอันนี้ได้ถ้าพิจารณาม้าหมุนในงานวัดซึ่งเป็นจานหมุนขนาดใหญ่มีตัวสัตว์ชนิดต่างๆติดอยู่บนจานให้เด็กนั่ง สมมติว่าจานหมุนทวนเข็มนาฬิกาและ สมมติว่าเรานั่งบนยีราฟ แล้วสังเกตดูคนที่นั่งบนสิงโตหรือม้าลายหรืออื่นๆ เมื่อม้าหมุนๆได้ 1 รอบ เราจะพบว่าคนอื่นๆหมุนรอบตัวเราได้ 1 รอบ ในทิศทวนเข็ม ในทำนองเดียวกันคนที่อยู่บนสิงโตก็บอกว่าคนอื่นหมุนรอบตัวเขาในทิศทวนเข็มได้ 1 รอบเช่นกัน

2. โมเมนตัมเชิงมุม

โมเมนตัมเชิงมุมเป็นปริมาณที่อ้างอิงเทียบกับจุด เรานิยาม(ตกลงกัน)ว่า ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่โดยมีโมเมนตัมเชิงเส้น $\vec{P}$ (โดย $\vec{P} = m\vec{v}$) โมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L}$ ของอนุภาคเทียบกับ (รอบ) จุดใด จุดหนึ่ง (เรียกว่า จุดหมุน) นิยามด้วยผลคูณเชิงเวกเตอร์ระหว่าง $\vec{r}$ และ $\vec{P}$ คือ [##]

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \qquad (1)^*$$

เมื่อ $\vec{r}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งชี้จากจุดหมุนไปยังอนุภาค

สำหรับโมเมนตัมของระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง นิยามด้วยผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมของสมาชิกทั้งหมด

ไม่ว่าจะเป็นการหมุนและกลิ้งในระนาบ หรือการหมุนใน 3 มิติ นิยามเริ่มต้นของโมเมนตัมเชิงมุมเป็นดังสมการ 1

พึงระลึกว่าเมื่อเปลี่ยนจุดอ้างอิง (จุดหมุน) โมเมนตัมเชิงมุมจะเปลี่ยนไป โดยอาจเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทาง

3.โมเมนต์ความเฉื่อย

โมเมนต์ความเฉื่อยเป็นปริมาณที่อ้างอิงเทียบกับแกน

[#]ในที่นี้ไม่ขอกล่าวถึงรายละเอียดในการพิสูจน์

[##]โมเมนตัมเชิงมุมเป็นปริมาณเวกเตอร์ เพราะเป็นปริมาณที่นิยามจากผลคูณเชิงเวกเตอร์(cross product) ของเวกเตอร์สองอัน เราพิสูจน์ได้โดยง่ายด้วยการเขียนให้อยู่ในองค์ประกอบของพิกัดฉากเพื่อแสดงว่ามันประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนใดแกนหนึ่งของอนุภาคตัวหนึ่ง นิยามด้วยมวลคูณด้วยระยะทางตั้งฉากจากมวลไปยังแกนนั้นยกกำลังสอง คือ

$$I_{อนุภาค} = mr_{\perp}^{2} \tag{2)*$$

เมื่อ $r_{\perp}$ เป็นระยะทางตั้งฉากจากมวล m ไปยังแกน

สำหรับโมเมนต์ความเฉื่อยของระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง นิยามด้วยผลรวมของโมเมนต์ความเฉื่อยของสมาชิกทั้งหมด ต่างกันเพียงแต่คณิตศาสตร์ที่ใช้ในการรวม

ในกรณีระบบอนุภาค โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนใดแกนหนึ่งของระบบอนุภาค ถ้าให้ I แทนโมเมนต์ความเฉื่อยของระบบอนุภาค จะได้

$$I = \sum m_i r_{i\perp}^{2} \qquad (3)$$

เมื่อ $r_{i\perp}$ คือ ระยะตั้งฉากจากมวลตัวที่ i ไปยังแกน

ในกรณีของวัตถุแข็งเกร็ง(วัตถุที่ถูกแรงกระทำแล้วรูปร่างไม่เปลี่ยน) ซึ่งเป็นสิ่งที่เราสนใจมากที่สุดในเรื่องการหมุนนั้น เราพิจารณาได้ว่าวัตถุแข็งเกร็งคือระบบอนุภาคที่อนุภาคแต่ละตัวอยู่ชิดติดกัน กล่าวคือวัตถุแข็งเกร็งประกอบด้วยชิ้นเล็ก ๆ อัดกันแน่นจนถือได้เป็นเนื้อเดียวกัน ถ้า dm คือมวลของชิ้นเล็ก ๆ นี้ และ $r_{\perp}$ คือระยะตั้งฉากจากมวล dm ไปยังแกนที่เราสนใจ โมเมนต์ความเฉื่อย dI ของมวล dm มีค่า

$$dI = r_{\perp}^{2} dm \qquad (4)$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทั้งก้อน I หาได้จากการรวมโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลชิ้นเล็ก ๆ เหล่านี้ตลอดทั่วทั้งก้อนของวัตถุ เนื่องจากมวลเล็กๆเหล่านี้อยู่ชิดติดกัน การรวมจึงเป็นการรวมด้วยการอินทิเกรต (ถ้ามวลเล็กๆอยู่ห่างกันเรารวมด้วยการบวก ดังสมการที่ 3) คือ

$$I = \int r_{\perp}^{2} dm \qquad (5)^*$$

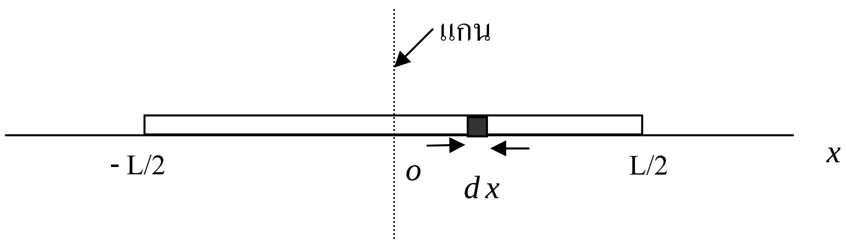
ข้อแนะนำ นักเรียนจำเพียงนิยามของโมเมนต์ความเฉื่อยในสมการ 1 ก็เพียงพอแล้ว สมการ 5 ที่เราใช้กันมากนั้นมันจะออกมาเองเมื่อเราใช้แคลคูลัสเข้าไปช่วย

ตัวอย่างที่ 1 แท่งโลหะสม่ำเสมอยาว L เมตร มวล m กิโลกรัม จงคำนวณโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งโลหะนี้รอบแกนที่ตั้งฉากกับแท่งโลหะและผ่าน

ก) จุดศูนย์กลางมวล ข) ปลายด้านใดด้านหนึ่ง

วิธีทำ

ก) ให้แท่งโลหะวางตัวตามแนวแกน x และจุดกำเนิดอยู่ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแท่งโลหะ ดังรูป 1 ก



รูป 1 ก

เนื่องจากเป็นแท่งโลหะสม่ำเสมอดังนั้นความหนาแน่นเชิงเส้น $\rho_l = \dfrac{m}{L}$ กิโลกรัม/เมตร และเนื่องจากแท่งโลหะอยู่ในแนวแกน x ดังนั้นส่วนย่อยใดๆของแท่งนี้จึงยาว dx เมตร

พิจารณาชิ้นเล็ก ๆ ของแท่งโลหะ ซึ่งยาว dx เมตร และอยู่ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ ดังในรูป 1ก

มวลของชิ้นเล็ก ๆ นี้ $dm \quad = \quad \dfrac{m}{L}dx$ กิโลกรัม

โมเมนต์ความเฉื่อยของชิ้นเล็ก ๆ นี้[#] $dI = x^2 dm \;=\; x^2\dfrac{m}{L}dx$ กิโลกรัม-เมตร^2

ดังนั้น โมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งโลหะทั้งแท่ง I หาได้จากการรวม(ด้วยการอินทิเกรต)โมเมนต์ความเฉื่อยของชิ้นเล็กๆทั้งหมด ตั้งแต่ $x = -\dfrac{L}{2}$ ถึง $x = \dfrac{L}{2}$ คือ

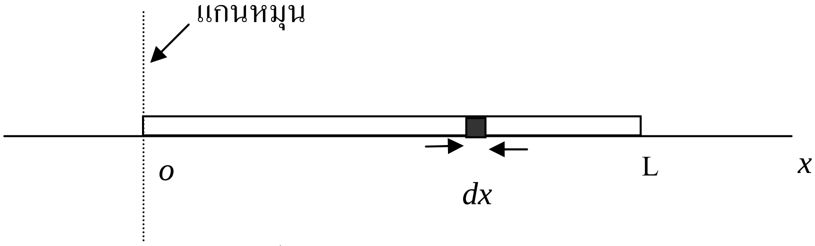
$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{L} x^2 dx$$

ทั้ง m และ L เป็นค่าคงที่ ดึงออกนอกเครื่องหมายอินทิเกรต จะได้

$$I = \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{m}{3L}\left\{\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right\} = \frac{1}{12}mL^2 \quad \text{กิโลกรัม-เมตร}^2$$

ข) ให้แท่งโลหะวางตัวตามแนวแกน x โดยจุดกำเนิดอยู่ที่ปลายแท่งโลหะด้านซ้าย ดังรูป 1ข



1ข

การพิจารณาในช่วงแรกจะเหมือนกับในข้อ ก) ซึ่งจะได้โมเมนต์ความเฉื่อยของชิ้นเล็กๆ

$dI = x^2 dm \;=\; x^2\dfrac{m}{L}dx$ กิโลกรัม-เมตร^2

[#] ผู้ที่ไม่คุ้นเคยกับการอินทิเกรตควรพิจารณาให้เห็นว่าแม้ในรูป 1 ก ส่วนย่อยอยู่ในตำแหน่งที่ x เป็นบวก แต่ไม่ว่าส่วนย่อยจะอยู่ที่ใดของแท่งโลหะ โมเมนต์ความเฉื่อยของส่วนย่อยเท่ากับ $x^2\dfrac{m}{L}dx$ ทั้งนั้น

โมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งโลหะทั้งแท่ง I หาได้จากการรวม(ด้วยการอินทิเกรต)โมเมนต์ความเฉื่อยของชิ้นเล็กๆทั้งหมด ตั้งแต่ $x=0$ ถึง $x=L$ คือ

$$I=\int_0^L \frac{m}{L}x^2dx$$

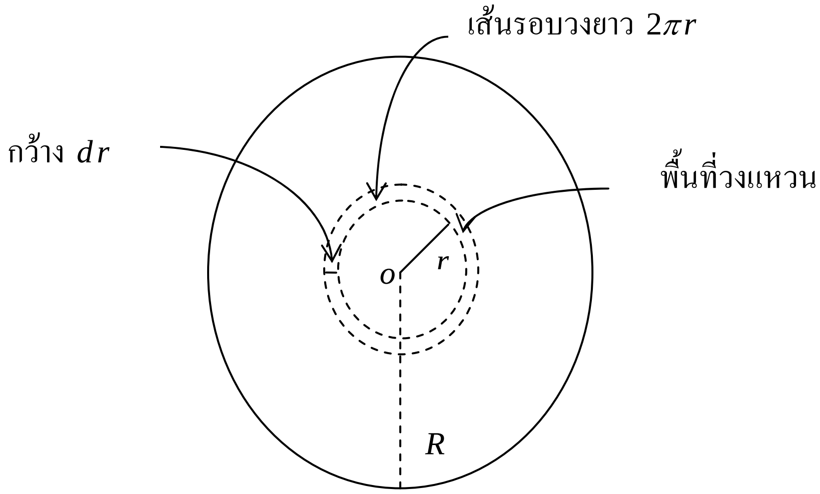
$$=\frac{m}{L}\int_0^L x^2dx=\frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L=\frac{m}{3L}\left[x^3\right]_0^L$$

$$=\frac{m}{3L}\left\{(L)^3-(0)^3\right\}=\frac{1}{3}mL^2 \qquad \text{กิโลกรัม-เมตร}^2$$

ตัวอย่างที่ 2 จานกลม (หรือทรงกระบอก) สม่ำเสมอรัศมี R เมตร มวล m กิโลกรัม จงคำนวณโมเมนต์ความเฉื่อยของจานนี้รอบแกนซึ่งตั้งฉากกับจาน และผ่านจุดศูนย์กลางมวล O

วิธีทำ ให้แกนหมุนตั้งฉากกับระนาบของกระดาษและผ่านจุด O เมื่อมองดูตามหน้าตัดของจาน จะเห็นดังในรูป 2 ถึงแม้จานจะมีความหนา (คือเป็นทรงกระบอก) แต่การคำนวณจะเป็นเช่นจานบาง

เรามองว่าจานประกอบด้วยวงแหวนรัศมี r เมตร ซึ่งมีเส้นรอบวง $2\pi r$ เมตร กว้าง dr เมตร เรียงกันโดยไม่มีช่องโหว่และไม่เกยซ้อนกัน ตั้งแต่ $r=0$ เมตร ถึง $r=R$ เมตร ตัวอย่างของวงแหวนวงหนึ่ง แสดงดังรูป 2



รูป 2

พื้นที่ของวงแหวนนี้มีขนาด $=2\pi r\,dr$ ตารางเมตร

ความหนาแน่นเชิงผิวของจาน $\rho_A=\dfrac{m}{\pi R^2}$ กิโลกรัม/ตารางเมตร

ดังนั้น มวลของวงแหวน $dm=\dfrac{2m}{R^2}r\,dr$ กิโลกรัม

เนื่องจาก dr มีค่าน้อยมากจนถือได้ว่าทุกตำแหน่งบนวงแหวนนี้อยู่ห่างจากจุด o เป็นระยะทาง r เมตร ดังนั้น โมเมนต์ความเฉื่อยของวงแหวน dI จึงเป็น

$$dI = r^2 dm = \frac{2m}{R^2} r^3 dr \qquad \text{กิโลกรัม-เมตร}^2$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของจานหาได้จากการรวมโมเมนต์ความเฉื่อยของวงแหวนเล็ก ๆ เหล่านี้ตั้งแต่ $r = 0$ ถึง R เมตร คือ

$$I = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{2m}{4R^2}\left[r^4\right]_0^R = \frac{m}{2R^2}\left(R^4 - 0\right) = \frac{1}{2} mR^2 \qquad \text{กิโลกรัม-เมตร}^2$$

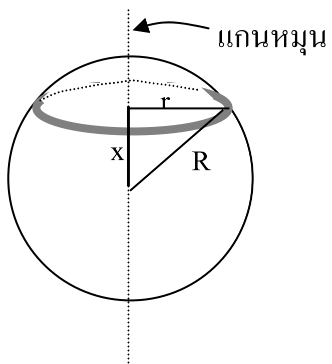
ตัวอย่างที่ 3 ทรงกลมตันมวล m กิโลกรัม รัศมี R เมตร จงคำนวณโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล ดังรูป 3

วิธีทำ

ให้แกนหมุนคือแกน x ในรูป 3 และจุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวลของทรงกลม พิจารณาว่า ทรงกลมประกอบด้วยจานเล็ก ๆ ที่ตั้งฉากกับแกนหมุน จานหนา dx เมตรและรัศมีของจาน $r = (R^2 - x^2)^{1/2}$ เมตร

เพราะว่า ปริมาตรของจานเล็ก ๆ[#] = พื้นที่จาน $\times$ ความหนาของจาน

$= \pi r^2 dx = \pi(R^2 - x^2)dx$ เมตร^3



รูป 3

[#]นักเรียนอาจสงสัยว่าขอบจานไม่ได้เป็นมุมฉาก ดังนั้นการหาปริมาตรจากพื้นที่คูณความหนาของจานน่าจะผิด แต่พึงระลึกว่าเนื่องจาก dx นั้นบางเฉียบ เราจึงบรรยายปริมาตรของจานว่าเท่ากับพื้นที่คูณความหนา

และเพราะว่า มวลของจาน = ความหนาแน่นเชิงปริมาตร × ปริมาตรของจาน

โดยความหนาแน่นเชิงปริมาตรของทรงกลม $\rho_v = \dfrac{m}{\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\right)}$ กิโลกรัม/เมตร ^{3}

ดังนั้น มวลของจาน $dm = \left(\dfrac{3m}{4\pi R^3}\right)\pi(R^2 - x^2)\,dx = \left(\dfrac{3m}{4R^3}\right)(R^2 - x^2)\,dx$ กิโลกรัม

เทียบกับตัวอย่างที่ 2 จะได้ว่า จานเล็ก ๆ นี้ มีโมเมนต์ความเฉื่อย

$$dI = \frac{1}{2}r^2 dm$$

$$= \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\left\{\frac{3m}{4R^3}(R^2 - x^2)\,dx\right\} = \frac{3m}{8R^3}(R^2 - x^2)\,dx \quad \text{กิโลกรัม-เมตร}^2 \qquad (ก)$$

พิจารณาดูจะเห็นว่าทรงกลมซีกบนและซีกล่างสมมาตรกัน คือมีโมเมนต์ความเฉื่อยเท่ากัน เราจะหาเฉพาะของซีกบน ซึ่งเมื่อคูณด้วย 2 ก็จะได้โมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกลมทั้งลูก

โมเมนต์ความเฉื่อยครึ่งซีกบนของทรงกลม $I_{บน}$ หาได้จากการรวมโมเมนต์ความเฉื่อยในสมการ (ก) ตั้งแต่ $x = 0$ ถึง R เมตร คือ

$$I_{บน} = \int_0^R \frac{3m}{8R^3}(R^2 - x^2)\,dx = \frac{3m}{8R^3}\int_0^R (R^4 - 2R^2x^2 + x^4)\,dx$$

$$= \frac{3m}{8R^3}\left\{\left[R^4 x\right]_0^R - 2R^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^R + \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^R\right\}$$

$$= \frac{1}{5}mR^2 \qquad \text{กิโลกรัม-เมตร}^2$$

ดังนั้น โมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกลมทั้งลูก I

$$I = \frac{2}{5}mR^2 \qquad \text{กิโลกรัม-เมตร}^2$$

ทฤษฎีแกนขนาน (parallel-axis theorem)

วัตถุแข็งเกร็ง*<u>รูปร่างอะไรก็ได้</u>* มวล m มีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลเป็น I_{CM} จะได้ว่า โมเมนต์ความเฉื่อย I ของวัตถุนี้รอบแกนใด ๆ ซึ่งขนานกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลและอยู่ห่างกันเป็นระยะ h มีค่าเป็น

$$I = I_{CM} + mh^2 \qquad (6)*$$

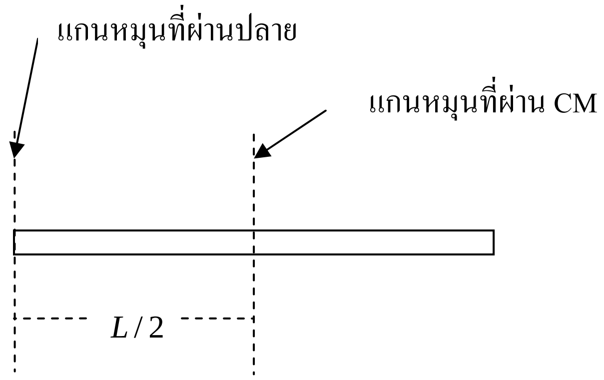
(ดูการพิสูจน์ในภาคผนวก ก)

ทฤษฎีแกนตั้งฉาก (perpendicular axis theorem)

วัตถุแข็งเกร็งซึ่งมี*รูปร่างแบนราบในระนาบ* สำหรับพิกัดฉากชุดใดๆซึ่งจุดกำเนิดอยู่ในระนาบของวัตถุ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบ จะเท่ากับผลบวกของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนทั้งสองที่เหลือที่อยู่ในระนาบของวัตถุ

(ดูการพิสูจน์ในภาคผนวก ก)

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้โมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งโลหะรอบแกนที่ตั้งฉากกับศูนย์กลางมวลของแท่งโลหะยาว L มวล m เท่ากับ $\frac{1}{12}mL^2$ จงใช้ทฤษฎีแกนขนานคำนวณโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนซึ่งตั้งฉากกับแท่งโลหะและผ่านปลายด้านใดด้านหนึ่ง ดังรูป 4



รูป 4

วิธีทำ เนื่องจากแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล และแกนหมุนที่ผ่านปลายแท่งโลหะ ขนานกันและอยู่ห่างกันเป็นระยะ $L/2$ จากทฤษฎีแกนขนาน จะได้ว่า

$$I = I_{CM} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

เท่ากับการคำนวณโดยตรงในตัวอย่างที่ 1ข

4 ทอร์ก

ถ้าอนุภาคถูกแรง $\vec{F}$ กระทำ เรานิยามทอร์ก $\vec{\tau}$ ที่กระทำต่ออนุภาคเทียบกับ (รอบ) จุดอ้างอิง (จุดหมุน) จุดหนึ่ง ด้วยผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ตำแหน่งกับแรง คือ

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (7)*$$

เมื่อ $\vec{r}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่ง ซึ่งชี้จากจุดหมุนไปยังอนุภาค

จากนิยามจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ทอร์กเป็นปริมาณที่ขึ้นกับจุดหมุน เช่นเดียวกับโมเมนตัมเชิงมุม

ในกรณีของระบบอนุภาค เรานิยาม*<u>ทอร์กของแรงภายนอกระบบ</u>*รอบจุดหมุนจุดหนึ่งด้วยผลรวมของทอร์กที่กระทำต่ออนุภาคแต่ละตัวรอบจุดหมุนจุดนั้น คือ

$$\bar{\tau} = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_{iext} \qquad (8)$$

เมื่อ $\bar{r}_i$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งซึ่งชี้จากจุดหมุนไปยังอนุภาคตัวที่ i

$\bar{F}_{iext}$ คือ *<u>แรงภายนอกระบบ</u>*ที่กระทำต่ออนุภาคตัวที่ i

5 ความสัมพันธ์เบื้องต้นระหว่างทอร์กกับโมเมนตัมเชิงมุม

จากภาคผนวก ข เราได้ว่า

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt} \qquad (9)*$$

คือ ทอร์กของแรงภายนอกระบบ เท่ากับ อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุมของระบบ(สังเกตโดยผู้สังเกตบนกรอบอ้างอิงเฉื่อย) โดยทั้งทอร์กและโมเมนตัมเชิงมุมต้องคิดรอบจุดเดียวกัน ในทางปฏิบัติเรามักเลือกจุดซึ่ง

1) เป็นจุดตรึง (อยู่นิ่งและไม่มีความเร่ง)
2) หรือถ้ามีความเร่งก็ต้องเป็นจุดศูนย์กลางมวลของระบบ
3) หรือถ้าไม่ใช่จุดศูนย์ กลางมวลของระบบก็ต้องมีความเร่งพุ่งเข้าหรือพุ่งออกผ่านศูนย์กลางมวล

จุดทั้งสามแบบนี้ทำให้สมการ (9) เป็นจริง

สมการ (9) พร้อมเงื่อนไขทั้งสาม ใช้ได้ไม่ว่าจะเป็นการหมุนและกลิ้งในระนาบ หรือการหมุนในสามมิติ และเป็นสมการพื้นฐานในการหาสมการที่จะบรรยายการหมุน ไม่ว่าจะเป็นการหมุนและกลิ้งในระนาบ หรือหมุนใน 3 มิติ

<u>พึงระลึก</u> จุดที่อยู่นิ่งอาจมีความเร่งก็ได้ ตัวอย่างเช่นมวลติดสปริงและกำลังสั่นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายนั้น ตำแหน่งที่มวลอยู่นิ่ง(ชั่วขณะ) เป็นตำแหน่งที่มีความเร่งมากที่สุด

หรือในกรณีที่ทรงกระบอก(หรือทรงกลม) กลิ้งโดยไม่ไถลบนพื้นราบหรือพื้นเอียง ตำแหน่ง*บนทรงกระบอก* ที่แตะกับพื้นนั้นอยู่นิ่ง(ชั่วขณะ) แต่มีความเร่งในแนวเข้าสู่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก

ในเอกสารนี้จะใช้คำว่าจุดตรึง เพื่อบอกว่าเป็นจุดที่อยู่นิ่งและไม่มีความเร่ง

6 ความเร็วของตำแหน่งต่างๆบนวัตถุแข็งเกร็งที่กำลังหมุน สังเกตโดยผู้ที่ติดไปกับวัตถุ

เมื่อวัตถุแข็งเกร็งกำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\bar{\omega}$ ความเร็วของจุดใดๆบนวัตถุ สังเกต(วัด) โดยผู้สังเกตที่ติดไปกับวัตถุ หาได้จาก

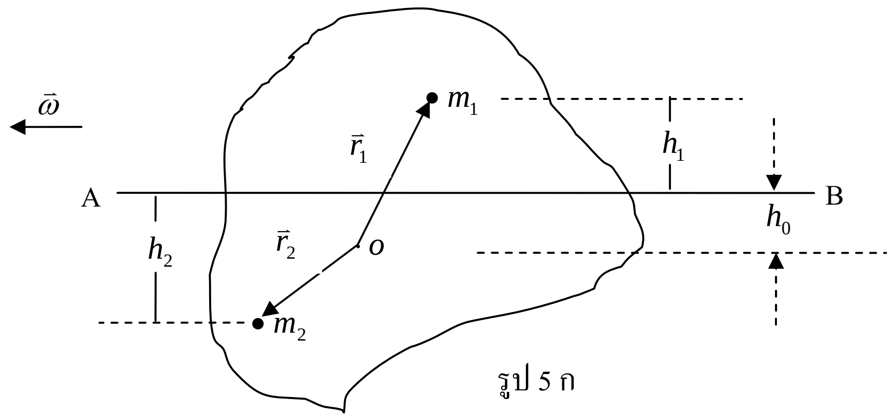
$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (10)*$$

เมื่อ $\bar{r}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งที่ชี้จากผู้สังเกตไปยังจุดนั้น

เพื่อเป็นตัวอย่างสำหรับผู้ที่ไม่คุ้นเคยกับสมการ (10) สมมติมีแผ่นพลาสติกเบากำลังหมุนรอบแกนตรึง AB ด้วยความเร็วเชิงมุม $\bar{\omega}$ (กำมือขวาให้นิ้วทั้งสี่ไปตามการหมุน หัวแม่มือจะชี้ไปทางซ้าย

มือดังในรูป 5 ก) แผ่นนี้มีมวล m_1 และ m_2 ติดอยู่ ณ เวลาหนึ่งแผ่นนี้อยู่ในระนาบของกระดาษ โดยมวล m_1 กำลังพุ่งเข้าไปในกระดาษ ด้วยความเร็ว $h_1\omega$ และมวล m_2 กำลังพุ่งออกจากกระดาษด้วยความเร็ว $h_2\omega$ (สังเกตโดยเราที่อยู่นิ่ง) โดย h_1 และ h_2 เป็นระยะทางตั้งฉากจากแกน AB ของมวล m_1 และ m_2

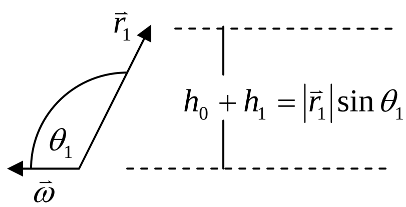
ให้จุด O เป็นจุดอ้างอิงที่ผู้สังเกตอยู่ดังในรูป 5กโดยมีระยะทางตั้งฉากจากแกน AB เท่ากับ h_0 เราจะเห็น O มีความเร็ว $h_0\omega$ ทิศพุ่งออก



รูป 5 ก

ผู้สังเกตที่ O จะเห็น m_1 พุ่งเข้าในกระดาษด้วยความเร็ว $(h_0 + h_1)\omega$ ซึ่งเท่ากับ $\vec{\omega}\times\vec{r}_1$ นั่นเองเพราะ $\vec{\omega}\times\vec{r}_1$ มีทิศพุ่งเข้า ส่วนขนาดเท่ากับ $|\vec{\omega}||\vec{r}_1|\sin\theta_1 = \omega(h_0 + h_1)$ ดังในรูป 5ข

รูป 5ข



ทำนองเดียวกันผู้สังเกตที่ O จะเห็น m_2 พุ่งออกจากกระดาษด้วยความเร็ว $(h_2 - h_0)\omega$ ซึ่งเท่ากับ $\vec{\omega}\times\vec{r}_2$

ผลที่ได้จะสอดคล้องกับหัวข้อที่ 1 เรื่องความเร็วเชิงมุม คือผู้สังเกตที่ O จะเห็น m_1 และ m_2 หมุนรอบตัวเขาด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ เดียวกับที่หมุนรอบแกน AB

นักเรียนลองไตร่ตรองดูจะพบว่า ไม่ว่ารูปร่างของวัตถุแข็งเกร็งจะเป็นเช่นใด และไม่จำเป็นต้องหมุนรอบแกนตรึง ผู้สังเกตที่ติดไปกับวัตถุจะเห็นความเร็วของจุดใดๆบนวัตถุเป็นดังสมการ (10) เสมอ

7 โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งซึ่งหมุนและกลิ้งในระนาบ สังเกตโดยผู้สังเกตที่ติดไปกับวัตถุ

ในหัวข้อที่ 2 ได้กล่าวแล้วว่า เรานิยามโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาครอบจุดๆหนึ่งด้วย $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ ถ้าเป็นโมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาคหรือวัตถุแข็งเกร็ง เรานิยามด้วยผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมของสมาชิกทั้งหมดรอบจุดๆนี้

พิจารณาการหมุนของแผ่นพลาสติกในรูป 5ก ถ้าเราใช้จุดอ้างอิงที่ตรึง(ไม่ติดไปกับวัตถุ) เมื่อวัตถุหมุน เวกเตอร์ตำแหน่งของมวลแต่ละตัวก็เปลี่ยนไปเรื่อย ดังนั้นจึงคำนวณหาโมเมนตัมเชิงมุมได้ยาก แต่ถ้าเราอ้างอิงเทียบกับจุดที่ติดไปกับวัตถุ เมื่อวัตถุหมุน เวกเตอร์ตำแหน่งของมวลแต่ละตัวจะไม่เปลี่ยน เนื่องจากโมเมนตัมเชิงมุมของสมาชิกตัวที่ i สังเกตโดยผู้สังเกตที่ติดไปกับวัตถุ $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$ ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุทั้งก้อนได้จากการรวมโมเมนตัมเชิงมุมของสมาชิกทุกตัว

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \qquad (11)$$

ในสมการ (11) นี้ เพื่อให้เข้าใจง่ายจึงสมมติว่าสมาชิกอยู่ห่างๆกัน จึงใช้การรวมแบบ summation ถ้าสมาชิกเรียงชิดติดกันดังเช่นในกรณีวัตถุแข็งเกร็ง เราใช้การรวมด้วยการอินทิเกรตซึ่งต่างกันเพียงคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่แนวความคิดทางฟิสิกส์เหมือนกัน

ถ้าเราสร้าง*พิกัดฉากที่ติดไปกับวัตถุ* เมื่อแตก $\vec{L}$ ในสมการ (11) ออกเป็นองค์ประกอบในพิกัดฉากนี้ จะได้

$$\vec{L} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k} \qquad (12)$$

ถ้าเลือก*ให้แกน z ชี้ไปตามทิศของความเร็วเชิงมุม* จากภาคผนวก ค *ในกรณีการหมุนและกลิ้งในระนาบ* จะได้ว่า

$$\vec{L} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k} = I_{xz} \omega \hat{i} + I_{yz} \omega \hat{j} + I_z \omega \hat{k} \qquad (13)$$

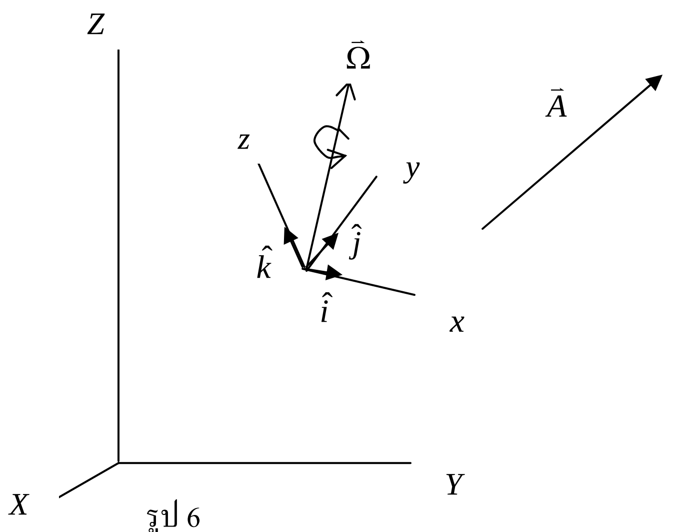
โดย $I_{xz} = \int -xz\,dm$, $I_{yz} = \int -yz\,dm$

และ $I_z = \int (x^2 + y^2)\,dm$

8 อัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งและผู้สังเกตที่หมุน

นักเรียนลองเขียนลูกศรอันหนึ่งบนกระดาษข้างหน้านักเรียน จะเห็นลูกศรนี้ชี้ทิศเดิมและมีขนาดเท่าเดิม คือเห็นลูกศรนี้ไม่เปลี่ยน แต่ผู้สังเกตที่นิ่งนอกโลกจะเห็นลูกศรนี้เปลี่ยนทิศไปเรื่อย เนื่องจากโลกหมุน เขาจึงบอกว่าลูกศรนี้มีการเปลี่ยนแปลง เนื่องจากเราสามารถใช้ลูกศรแทนเวกเตอร์ใดๆได้ ดังนั้นจะเห็นว่าผู้สังเกตที่อยู่นิ่งกับผู้สังเกตที่หมุน(อยู่บนโลก) จะเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ใดๆไม่เท่ากัน เราจะหาความสัมพันธ์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งและผู้สังเกตที่หมุน

พิจารณาแกน x, y, z ที่หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\Omega}$ เทียบกับแกน X, Y, Z ที่อยู่นิ่ง ดังรูป 6



รูป 6

ให้ $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

เวกเตอร์ $\bar{A}$ เขียนโดยใช้พิกัด x, y, z ได้เป็น

$$\bar{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

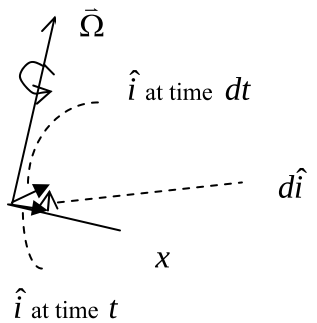
เนื่องจากพิกัด x, y, z หมุน เวกเตอร์หน่วยไม่ได้ชี้ทิศเดิม อนุพันธ์เทียบกับเวลาของเวกเตอร์ $\bar{A}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง จึงเป็น

$$\dot{\bar{A}} = \dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k} + A_x\dot{\hat{i}} + A_y\dot{\hat{j}} + A_z\dot{\hat{k}} \qquad (14)$$

ผู้สังเกตที่หมุนจะเห็นเวกเตอร์หน่วย $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ไม่เปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทาง ซึ่งเห็นได้โดยง่ายด้วยการสร้างพิกัดฉากข้างหน้านักเรียน นักเรียนจะเห็น $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ไม่เปลี่ยน นั่นคือ พจน์ $\dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k}$ บอกถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\bar{A}$ สังเกตจากผู้สังเกตที่หมุนไปกับพิกัด x, y, z เขียนเป็นสัญลักษณ์ $\left(\dot{\bar{A}}\right)_{xyz}$ คือ

$$\left(\dot{\bar{A}}\right)_{xyz} = \dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k} \qquad (15)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\hat{i}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง ดูได้จากรูป 7



รูป 7

จากรูป 7 เวกเตอร์หน่วย $\hat{i}$ ที่เปลี่ยนไปนิดหน่อยเมื่อเวลาเปลี่ยนไปนิดหน่อย dt คือ $d\hat{i}$
ขนาดของ $d\hat{i}$ = (รัศมีการกวาดรอบแกนหมุน) (ความเร็วเชิงมุม) (เวลาที่เปลี่ยนไป)
ถ้าให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{\Omega}$ กับ $\hat{i}$ จะได้

ขนาดของ $d\hat{i} = \left(\left|\hat{i}\sin\theta\right|\right)\left(\left|\bar{\Omega}\right|\right)dt = \left|\bar{\Omega}\times\hat{i}\right|dt$

และเมื่อพิจารณาดูนักเรียนจะเห็นว่าทิศของ $d\hat{i}$ อยู่ในทิศของ $\bar{\Omega}\times\hat{i}$

นั่นคือ $d\hat{i} = \bar{\Omega}\times\hat{i}\quad dt$

หรือ
$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \dot{\hat{i}} = \bar{\Omega}\times\hat{i} \tag{16a}$$

ทำนองเดียวกัน จะได้
$$\dot{\hat{j}} = \bar{\Omega}\times\hat{j} \tag{16b}$$

และ
$$\dot{\hat{k}} = \bar{\Omega}\times\hat{k} \tag{16c}$$

แทน (16 a,b,c) ลงใน สามพจน์หลังของสมการ (14)

$$A_x\dot{\hat{i}} + A_y\dot{\hat{j}} + A_z\dot{\hat{k}} = A_x\bar{\Omega}\times\hat{i} + A_y\bar{\Omega}\times\hat{j} + A_z\bar{\Omega}\times\hat{k} = \bar{\Omega}\times(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$$

หรือ
$$A_x\dot{\hat{i}} + A_y\dot{\hat{j}} + A_z\dot{\hat{k}} = \bar{\Omega}\times\bar{A} \tag{16d}$$

แทน (16d) และ (15) ลงใน (14) ได้

$$\dot{\bar{A}} = \left(\dot{\bar{A}}\right)_{xyz} + \bar{\Omega}\times\bar{A} \tag{17*}$$

สมการ (17) เป็นสมการที่เราจะนำไปใช้ สมการนี้บอกว่า *อัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ ใดๆ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง จะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่หมุน(ด้วยความเร็วเชิงมุม $\bar{\Omega}$) บวกกับ $\bar{\Omega}\times\bar{A}$*

พึงสังเกตว่าผู้สังเกตทั้งสองจะเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเชิงมุม(ความเร่งเชิงมุม) เท่ากัน ทั้งนี้เพราะ $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega} = 0$ คือ

$$\dot{\bar{\Omega}} = \left(\dot{\bar{\Omega}}\right)_{xyz} \tag{18}$$

9 ความสัมพันธ์ระหว่างทอร์ก โมเมนต์ความเฉื่อย และความเร่งเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็ง ในกรณีการหมุนและกลิ้งในระนาบ

สมการ (9) นั้นยังไม่สะดวกที่จะนำมาใช้งาน เราจะหาสมการที่เหมาะสมกว่านี้ไว้ใช้งานในกรณีการหมุนและกลิ้งในระนาบ ดังต่อไปนี้

เราเลือกพิกัด xyz ติดไปกับวัตถุซึ่งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\bar{\omega}$ *<u>โดยเลือกให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุดที่ทำให้สมการ (9) เป็นจริงและเลือกแกน z ให้อยู่ในแนวของความเร็วเชิงมุม</u>* ดังนั้นความเร็วของวัตถุจึงเท่ากับ $\omega\hat{k}$

จากสมการ (13) โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุรอบจุดกำเนิด สังเกตโดยผู้สังเกตที่หมุน คือ

$$\bar{L} = I_{xz}\omega\hat{i} + I_{yz}\omega\hat{j} + I_z\omega\hat{k} \tag{13}$$

จากสมการ (17) ผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง จะสังเกตเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม เป็น

$$\dot{\bar{L}} = \left(\dot{\bar{L}}\right)_{xyz} + \omega\hat{k}\times(I_{xz}\omega\hat{i} + I_{yz}\omega\hat{j} + I_z\omega\hat{k}) \tag{19}$$

ผู้สังเกตที่ติดไปกับวัตถุจะเห็น $I_{xz}, I_{yz}, I_z, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ คงที่ และเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ω เท่ากับความเร่งเชิงมุม α ดังนั้น $\left(\dot{\vec{L}}\right)_{xyz} = I_{xz}\alpha\,\hat{i} + I_{yz}\alpha\,\hat{j} + I_z\alpha\,\hat{k}$ ระลึกว่าผู้สังเกตที่หมุนหรืออยู่นิ่งจะเห็น α เท่ากัน (ดูจากสมการ 18) ส่วนพจน์ทางขวามือของเครื่องหมายบวกของสมการ (19) ก็ cross เข้าไปตรงๆ ดังนั้น สมการ(19) จะเป็น

$$\dot{\vec{L}} = I_{xz}\alpha\,\hat{i} + I_{yz}\alpha\,\hat{j} + I_z\alpha\,\hat{k} - I_{yz}\omega^2\,\hat{i} + I_{xz}\omega^2\,\hat{j}$$

$$\dot{\vec{L}} = (I_{xz}\alpha - I_{yz}\omega^2)\,\hat{i} + (I_{yz}\alpha + I_{xz}\omega^2)\,\hat{j} + I_z\alpha\,\hat{k} \qquad (19a)$$

แต่เราเลือกจุดกำเนิดที่ทำให้สมการ $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt} = \dot{\bar{L}}$ เป็นจริง ดังนั้นองค์ประกอบของทอร์กในแนวแกน x คือ $\tau_x = (I_{xz}\alpha - I_{yz}\omega^2)$ ทำนองเดียวกัน $\tau_y = (I_{yz}\alpha + I_{xz}\omega^2)$ และ $\tau_z = I_z\alpha$

__เนื่องจากในการหมุนและกลิ้งในระนาบที่เราเรียนนี้เป็นแบบอย่างง่ายซึ่งเราสนใจเฉพาะในแนวทิศของความเร็วเชิงมุม__ (แนว z) ซึ่ง $\tau_z = I_z\alpha$ โดยในหนังสือต่างๆมักเขียนสั้นๆเป็น

$$\tau = I\alpha \qquad (20)^{**}$$

ซึ่งเราต้องระลึกว่า τ เป็นทอร์กในแนวขนานกับแกนหมุนซึ่งแกนหมุนอยู่ในแนวทิศของความเร็วเชิงมุม

สมการ (20) นี้เป็นสมการที่ใช้มากในเรื่องการหมุนและการกลิ้งในระนาบ เนื่องจากมันมีพื้นฐานมาจากสมการ (9) ดังนั้นสมการ (20) จะถูกต้องก็ต่อเมื่อ

1) แกนหมุนไม่มีความเร่ง (ในทางปฏิบัติมักเป็นแกนตรึง)
2) หรือมีความเร่งก็ได้ถ้าเป็นแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล
3) หรือไม่เป็นแกนหมุนที่ผ่านศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้าเป็นแกนหมุนที่ผ่านจุดที่มีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกจากศูนย์กลางมวล

__สรุป__ เกี่ยวกับสมการ $\tau = I\alpha$

สมการ $\tau = I\alpha$ เรียกว่ากฎข้อที่สองของนิวตันกรณีของการหมุนและการกลิ้งในระนาบ ที่มาของมันเมื่อมองกว้างๆเป็นดังนี้

เฉพาะกฎข้อที่สองของนิวตันกรณีการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่คือ $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{CM}$ นั้น มันยังไม่พอเพียงถ้าเราต้องการศึกษาการเคลื่อนที่แบบหมุน ต้องมีการดัดแปลง ขยับขยายเพื่อที่จะได้สมการที่เหมาะสมในการบรรยายการเคลื่อนที่แบบหมุน เราดัดแปลงขยับขยายโดยใช้เวกเตอร์ (พีชคณิตของเวกเตอร์) และแคลคูลัส

เริ่มจากการนิยามปริมาณที่เหมาะสมที่จะนำมาใช้บรรยายการหมุน เช่น

ความเร็วเชิงมุม $\bar{\omega}$ เป็นปริมาณที่อ้างอิงเทียบกับแกน

โมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$	เป็นปริมาณที่อ้างอิงเทียบกับจุด ถ้าเป็นโมเมนตัมเชิงมุมของระบบก็รวมโมเมนตัมเชิงมุมของสมาชิกของระบบทั้งหมด
โมเมนต์ความเฉื่อย $I = m r_{\perp}^{2}$	เป็นปริมาณที่อ้างอิงเทียบกับแกน ถ้าเป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของระบบก็รวมโมเมนต์ความเฉื่อยของสมาชิกของระบบทั้งหมด
ทอร์ก $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	เป็นปริมาณที่อ้างอิงเทียบกับจุด ถ้าเป็นทอร์กที่กระทำต่อระบบก็รวมทอร์กของแรงภายนอกที่กระทำต่อสมาชิกของระบบทั้งหมด

เมื่อใช้แคลคูลัสและกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองแบบเลื่อนที่ รวมทั้งกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สาม ทำให้ได้ความสัมพันธ์ว่า (คือสมการที่ 9)

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (9)$$

คือทอร์กของแรงภายนอกระบบ เท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมของระบบ สมการที่ (9) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อจุดที่ใช้อ้างอิงนั้นต้องไม่มีความเร่ง หรือมีความเร่งก็ได้ถ้าเป็นจุดศูนย์กลางมวล หรือไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้าความเร่งของจุดนั้นพุ่งเข้าหรือออกผ่านศูนย์กลางมวล

สมการที่ (9) ยังไม่เหมาะที่จะนำไปใช้งานจริง ในการใช้งานจริงในกรณีของการหมุนและกลิ้งในระนาบนั้น เราต้องการองค์ประกอบของสมการ (9) ในแนวขนานกับแกนหมุนซึ่งเป็นแนวทิศที่ตรงประเด็นที่จะใช้บรรยายการหมุนและกลิ้งในระนาบ(อย่างง่ายที่เราเรียน) โดยโมเมนตัมเชิงมุมในแนวนี้เขียนได้เป็น $I\omega$ และสุดท้ายทำให้เราได้ว่า

$$\tau = I\alpha$$

เป็นสมการที่เราใช้บรรยายการหมุนและการกลิ้งในระนาบ โดยแกนหมุนที่เราใช้อ้างอิงนั้นจะต้องไม่มีความเร่ง (ในทางปฏิบัติมักเป็นแกนตรึง) หรือมีความเร่งก็ได้ถ้าเป็นแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล หรือไม่เป็นแกนหมุนที่ผ่านศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้าเป็นแกนหมุนที่ผ่านจุดที่มีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกจากศูนย์กลางมวล

10 การหมุนด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ในกรณีการหมุนและกลิ้งในระนาบ

จากภาคผนวก ง การหมุนและการกลิ้งในระนาบด้วยความเร่งเชิงมุมคงตัวจะได้ว่า

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (21\text{ ก})$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \qquad (21\text{ข})$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (21\text{ค})$$

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right) t \qquad (21\text{ง})$$

11 พลังงานจลน์ของวัตถุแข็งเกร็ง

จากภาคผนวก จ เมื่อวัตถุแข็งเกร็งมีการหมุนและกลิ้ง เราคำนวณพลังงานจลน์ของวัตถุได้ดังนี้

1) ถ้ามีแกนหมุนที่อยู่นิ่ง(แกนอาจมีความเร่งก็ได้แต่ความเร็วเป็นศูนย์) เราพิจารณาได้ 2 แบบ

<u>แบบแรก</u> พิจารณาว่าวัตถุมีการเคลื่อนที่แบบหมุนเพียงอย่างเดียวรอบแกนที่อยู่นิ่งนี้ คือ

$$E_k = \frac{1}{2} I_{\text{นิ่ง}}\, \omega^2 \qquad (22)$$

เมื่อ $I_{\text{นิ่ง}}$ คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนที่อยู่นิ่งนี้

ω คืออัตราเร็วเชิงมุมที่วัตถุหมุนรอบแกนที่อยู่นิ่งนี้

<u>แบบที่สอง</u> พิจารณาว่าวัตถุเลื่อนที่ด้วยและหมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลด้วย ดังนั้น

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 \qquad (23)$$

เมื่อ v_{CM} คืออัตราเร็วของศูนย์กลางมวล

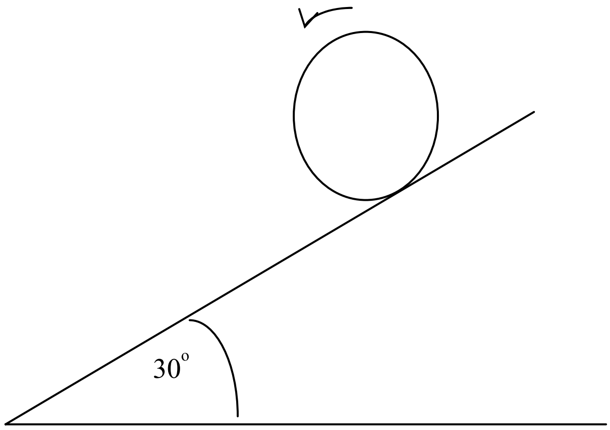
I_{CM} คือโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

ω คืออัตราเร็วเชิงมุมที่วัตถุหมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล (ซึ่งเท่ากับอัตราเร็วเชิงมุมที่วัตถุหมุนรอบแกนที่อยู่นิ่ง ; ดูในหัวข้อ 1 เรื่องความเร็วเชิงมุม)

ก็คือพลังงานจลน์หาได้จากผลรวมของพลังงานจลน์เนื่องจากการเลื่อนที่โดยคิดคล้ายกับว่ามวลทั้งหมดไปรวมอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล กับพลังงานจลน์เนื่องจากการหมุนรอบแกนหมุนที่ผ่านศูนย์กลางมวล

2) ถ้าไม่มีแกนหมุนที่อยู่นิ่ง พลังงานจลน์หาได้จากสมการ (23) เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 5 ทรงกระบอกตันรัศมี 0.1 เมตร กลิ้งลงมาตามพื้นเอียง ดังรูป 8 ก



รูป 8ก

(ก)ทรงกระบอกนี้หมุนรอบแกนใดบ้าง ทิศของความเร็วเชิงมุมในการหมุนรอบแต่ละแกนไปทางใด ขนาดเท่ากันหรือไม่

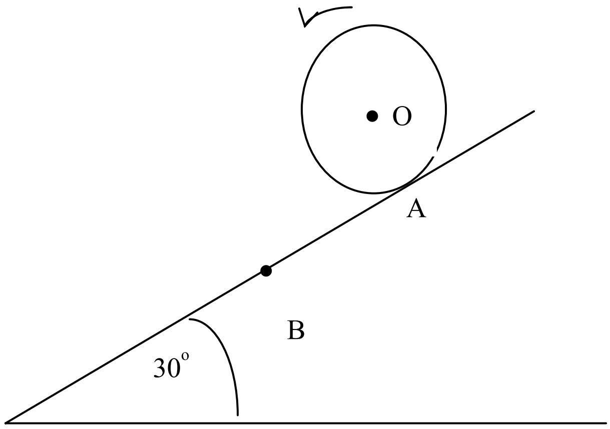
(ข) ถ้าทรงกระบอกกลิ้งและไถลด้วย สมการ $\tau = I\alpha$ ใช้ได้กับแกนใดบ้าง

ค) ถ้าทรงกระบอกกลิ้งโดยไม่ไถล สมการ $\tau = I\alpha$ ใช้ ได้กับแกนใดบ้าง

<u>วิธีทำ</u>

ก)อาจพิจารณาได้ว่าทรงกระบอกหมุนรอบแกนซึ่งตั้งฉากกับกระดาษ และผ่านจุดศูนย์กลางมวล O หรือ A ซึ่งเป็นจุดบนทรงกระบอกที่แตะพื้นและอยู่ในระนาบของหน้าตัดที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล O ดังในรูป 8ข หรือจุดอื่น ๆ อีกมากมาย ขอเพียงเป็นแกนที่ไม่ได้อยู่นอกทรงกระบอก ทิศของความเร็วเชิงมุมหาได้จากการกำมือขวาให้นิ้วทั้งสี่ไปตามทิศของลูกศรโค้งในรูป 8ข หัวแม่มือจะบอกทิศของความเร็วเชิงมุม คือมีทิศพุ่งออกจากกระดาษไม่ว่าจะพิจารณาว่าหมุนรอบแกนใด โดยนอกจากทิศของความเร็วเชิงมุมในการหมุนรอบแกนต่าง ๆ เป็นทิศเดียวกันแล้ว ขนาดก็ยังเท่ากันด้วย

เมื่อทรงกระบอกกลิ้งลงมาเรื่อยๆนั้น ทิศของความเร็วเชิงมุมมีทิศพุ่งออกจากกระดาษตลอดเวลา จึงเป็นการหมุนและกลิ้งในระนาบ



รูป 8ข

แต่ทรงกระบอกไม่ได้หมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุด B ซึ่งอยู่ที่พื้นเอียง เพราะทุกๆจุดของทรงกระบอกไม่ได้หมุนรอบแกนนี้ด้วยความเร็วเชิงมุมเดียวกัน ตัวอย่างเช่น ความเร็วเชิงมุมของจุด A รอบแกนนี้เป็นศูนย์ แต่ความเร็วเชิงมุมของจุด O รอบแกนนี้ไม่ใช่ศูนย์

ข) ถ้าทรงกระบอกกลิ้งและไถล ทุกๆจุดบนทรงกระบอกต่างก็มีความเร่ง ดังนั้น สมการ $\tau = I\alpha$ จะใช้ได้เฉพาะกับแกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุดศูนย์กลางมวล คือแกนที่ผ่านจุด O เท่านั้น

ค) ถ้าทรงกระบอกกลิ้งโดยไม่ไถล จุดบนทรงกระบอกที่ทรงกระบอกแตะพื้นและอยู่ในระนาบของหน้าตัดที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล O (จุด A) ความเร่งในแนวพื้นเอียงเป็นศูนย์แต่มีความเร่งในแนวพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางมวล O ความเร่งลัพธ์จึงมีทิศพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางมวล O ดังนั้น จึงมีแกนที่ใช้สมการ $\tau = I\alpha$ ได้ 2 แกน คือ

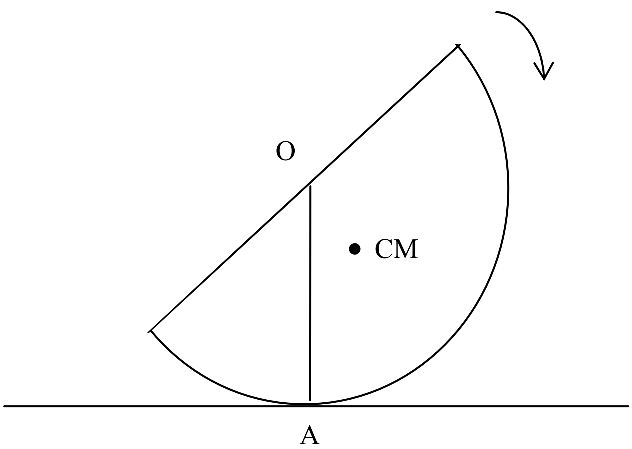
1) แกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุดศูนย์กลางมวล O ก็คือแกนในข้อ ข) และ
2) แกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุด A เหตุผลไม่ใช่เพราะว่าแกนนี้อยู่นิ่ง เพราะแม้ว่าแกนนี้อยู่นิ่งก็จริงแต่ก็มีความเร่ง เพียงแต่ความเร่งอยู่ในแนวที่พุ่งเข้าหาจุด O ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางมวล

ตัวอย่างที่ 6 ทรงกระบอกตันผ่าครึ่งวางบนพื้นราบ กำลังกลิ้งโดยไม่ไถลดังรูป 9

(ก)ทรงกระบอกผ่าครึ่งนี้หมุนรอบแกนใดบ้าง ทิศของความเร็วเชิงมุมในการหมุนรอบแต่ละแกนไปทางใด ขนาดเท่ากันหรือไม่

(ข) ถ้าทรงกระบอกผ่าครึ่งนี้กลิ้งและไถลด้วย สมการ $\tau = I\alpha$ ใช้ได้กับแกนใดบ้าง

(ค) ถ้าทรงกระบอกผ่าครึ่งนี้กลิ้งโดยไม่ไถล สมการ $\tau = I\alpha$ ใช้ ได้กับแกนใดบ้าง



รูป 9

<u>วิธีทำ</u>

คราวนี้จุดศูนย์กลางมวลไม่ใช่จุด O แล้ว แต่เป็นจุด CM ในรูป 9

ก) อาจพิจารณาได้ว่าทรงกระบอกผ่าครึ่งนี้หมุนรอบแกนซึ่งตั้งฉากกับกระดาษ และผ่านจุด O หรือจุดศูนย์กลางมวล CM หรือจุด A ซึ่งเป็นจุดบนทรงกระบอกผ่าครึ่งที่แตะพื้นและอยู่ในระนาบของหน้า

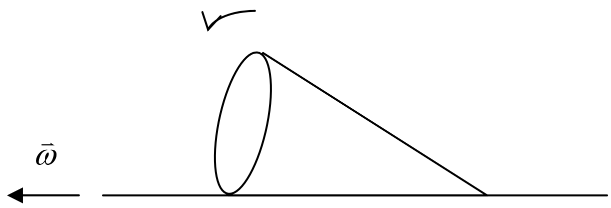
ตัดที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล O ดังในรูป 9 หรือจุดอื่น ๆ อีกมากมาย ขอเพียงเป็นแกนที่ไม่ได้อยู่นอกทรงกระบอกผ่าครึ่ง ทิศของความเร็วเชิงมุมหาได้จากการกำมือขวาให้นิ้วทั้งสี่ไปตามทิศของลูกศรโค้งในรูป 9 หัวแม่มือจะบอกทิศของความเร็วเชิงมุมคือมีทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษไม่ว่าจะพิจารณาว่าหมุนรอบแกนใด โดยนอกจากทิศของความเร็วเชิงมุมในการหมุนรอบแกนต่าง ๆ เป็นทิศเดียวกันแล้วขนาดก็ยังเท่ากันด้วย

เมื่อทรงกระบอกผ่าครึ่งกลิ้งลงมาเรื่อยๆนั้น ทิศของความเร็วเชิงมุมมีทิศพุ่งเข้าในกระดาษตลอดเวลา จึงเป็นการหมุนและกลิ้งในระนาบ

ข)ถ้าทรงกระบอกผ่าครึ่งกลิ้งและไถล ทุกๆจุดบนทรงกระบอกผ่าครึ่งต่างก็มีความเร่ง ดังนั้น สมการ $\tau = I\alpha$ จะใช้ได้เฉพาะกับแกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุดศูนย์กลางมวล คือแกนที่ผ่านจุด CM เท่านั้น

ค)ถ้าทรงกระบอกผ่าครึ่งกลิ้งโดยไม่ไถล จุดที่ทรงกระบอกแตะพื้นและอยู่ในระนาบของหน้าตัดที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล O (จุด A) จะอยู่นิ่งเทียบกับพื้นและมีความเร่งพุ่งเข้าหา O แต่ไม่ได้พุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางมวล CM ดังนั้นจึงใช้สมการ $\tau = I\alpha$ ไม่ได้ ทำให้มีแกนที่ใช้สมการ $\tau = I\alpha$ ได้เพียงแกนเดียว คือแกนที่ผ่านจุด CM เท่านั้น เหมือนดังในข้อ ข)

ตัวอย่างที่ 7 จงพิจารณากรวยกลิ้งบนพื้นราบ ดังรูป 10



รูป 10

<u>วิธีทำ</u>

แกนหมุนของกรวยคือแนวเส้นตรงที่กรวยแตะพื้นดังรูป 8 ความเร็วเชิงมุมชี้ตามแนวนี้ เมื่อกรวยเคลื่อนที่ไปทิศของความเร็วเชิงมุมเปลี่ยนไปเรื่อยๆ จึงไม่ใช่การหมุนและกลิ้งในระนาบ ดังนั้นไม่สามารถใช้สมการ $\tau = I\alpha$

ตัวอย่างที่ 8 ในตัวอย่างที่ 5 ถ้าทรงกระบอกกลิ้งโดยไม่ไถล

ก) จงใช้แกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุดศูนย์กลางมวล หาความเร่งเชิงมุม

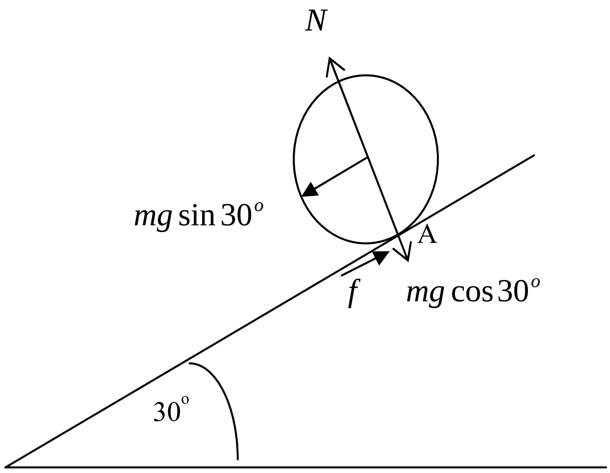
ข) จงใช้แกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุด A หาความเร่งเชิงมุม

ค) จงหาความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอก

<u>วิธีทำ</u>

ความเร็วเชิงมุมรอบแกนใดๆในทรงกระบอกเท่ากันหมด ซึ่งก็คือ ความเร่งเชิงมุมรอบแกนเหล่านี้เท่ากันหมดเช่นกัน เราจะใช้แกนในข้อ ก) และ ข) ทั้ง 2 แกนเพื่อหาความเร่งเชิงมุมนี้ ซึ่งคำตอบจะต้องออกมาเท่ากัน

แรงที่กระทำต่อทรงกระบอก แสดงในรูป 11 ซึ่งประกอบด้วย



รูป 11

แรงโน้มถ่วง mg ซึ่งคล้ายกับว่ากระทำที่จุดศูนย์กลางมวล เมื่อแยกออกเป็นองค์ประกอบในแนวขนานและตั้งฉากกับพื้นเอียง จะได้ $mg\sin 30^o$ และ $mg\cos 30^o$ ตามลำดับ

แรงที่พื้นเอียงกระทำต่อทรงกระบอกในแนวตั้งฉากกับพื้นเอียงคือ N

แรงที่พื้นเอียงกระทำต่อทรงกระบอกในแนวขนานกับพื้นเอียง คือแรงเสียดทานสถิต f ทิศดูได้โดยง่ายว่าชี้ขึ้นตามพื้นเอียง แต่ขนาดยังบอกไม่ได้ เพราะ $f \le \mu_s N$

ก) ใช้แกนที่ผ่านCM เป็นแกนหมุน โดย $\tau_{CM} = I_{CM}\alpha$ ซึ่งทอร์กของแรงอื่นเป็นศูนย์หมด ยกเว้นทอร์กของ f ดังนั้น

$$(0.1)\,f \quad = \quad \frac{1}{2}m(0.1)^2\alpha \qquad \text{(ก)}$$

พิจารณาการเลื่อนที่ คือ $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{CM}$ ดูในแนวขนานกับพื้นเอียง เนื่องจากทรงกระบอกกลิ้งโดยไม่ไถลความเร่งของศูนย์กลางมวลในแนวนี้เท่ากับ $(0.1)\alpha$ ทิศลงตามพื้นเอียง ดังนั้น

$$mg\sin 30^o - f \quad = \quad m(0.1)\alpha \qquad \text{(ข)}$$

หรือ

$$f \quad = \quad \frac{9.8}{2}m - 0.1\alpha m \qquad \text{(ค)}$$

แทน (ค) ลงใน (ก) จะได้ α = 32.67 เรเดียน/วินาที^{2}

ข)แกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุด A มีโมเมนต์ความเฉื่อย

$$I_A = I_{CM} + m(0.1)^2 = \frac{1}{2}m(0.1)^2 + m(0.1)^2 = \frac{3}{2}m(0.1)^2$$

ทอร์กของแรงอื่นเป็นศูนย์หมด ยกเว้นของ $mg\sin 30^0$ ดังนั้น

$$(mg\sin 30^0)(0.1) = \frac{3}{2}m(0.1)^2\ \alpha$$

จะได้ α = 32.67 เรเดียน/วินาที ^{2} เท่ากับในข้อ ก)

ค)เมื่อพิจารณาว่าจุดศูนย์กลางมวลหมุนรอบจุด A ซึ่งอยู่นิ่ง(ชั่วขณะ) ด้วยความเร่งเชิงมุม α ดังนั้น จะได้ว่า ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล $a_{CM} = \alpha(0.1)$ = 3.267   เมตร/วินาที ^{2} ทิศลงมาตามพื้นเอียง

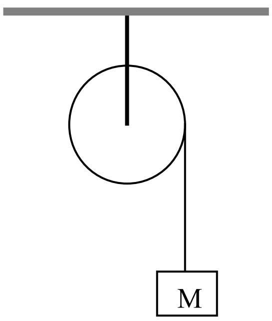
จะเห็นว่าในข้อ ก) ซึ่งเป็นวิธีที่ปลอดภัยเพราะใช้แกนหมุนที่ผ่าน CM นั้น ต้องใช้สมการถึง 2 สมการ แต่ในข้อ ข) นั้น ใช้เพียงสมการการเดียวได้ความเร่งเชิงมุมออกมาเลย อย่างไรก็ตามการใช้แกนในข้อ ข) นั้นต้องระวังให้ดี ดังได้กล่าวมาแล้ว

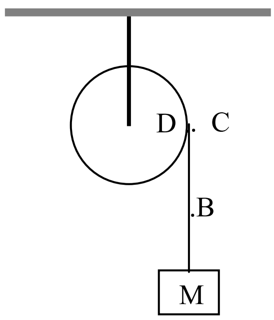
ตัวอย่างที่ 9 มวล M ผูกด้วยเชือกซึ่งพันรอบรอกรัศมี R เมตร หลายๆรอบ โดยรอกยึดติดกับเพดานดังรูป 12 (ก) ถ้ามวล มีความเร็ว v เมตร/วินาที และความเร่ง a เมตร/วินาที ^{2} จงหา

ก) ความเร็วเชิงมุมของรอก

ข) ความเร่งเชิงมุมของรอก

ในพจน์ของ v, a และ R





รูป 12 (ก)   (ข)

<u>วิธีทำ</u>

ให้   C   เป็นจุด<u>บนเชือก</u>ในตำแหน่งที่เริ่มสัมผัสกับรอก

B   เป็นจุดบนเชือกที่อยู่ระหว่างมวล M กับจุด C

พิจารณามวล M รวมทั้งเชือกจากมวล M ไปถึงจุด B เป็นวัตถุก้อนหนึ่ง เนื่องจากเชือกไม่ยืดไม่หด ทุกจุดบนวัตถุก้อนนี้มีความเร็วและความเร่งเดียวกัน ดังนั้น มวล M และจุด B จะมีความเร็วและความเร่งเดียวกัน

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาเชือกจาก B ถึง C เป็นวัตถุก้อนหนึ่ง จุด B และจุด C ก็จะมีความเร็วและความเร่งเดียวกัน

ดังนั้น จุด C มีความเร็ว v เมตร/วินาที และความเร่ง a เมตร/วินาที ^{2} ทิศลงในแนวดิ่ง

พิจารณาจุด D ซึ่งเป็นจุดบนรอกที่อยู่ติด ๆ กับจุด C ถ้าพิจารณาในแนวดิ่งจะเห็นว่าจุด C และจุด D เคลื่อนที่ไปพร้อมกัน ดังนั้นจุด C และจุด D มีความเร็วและความเร่งในแนวดิ่งเดียวกัน (จุด D มีความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางด้วย โดยมีขนาดเป็น $\frac{v^2}{R}$)

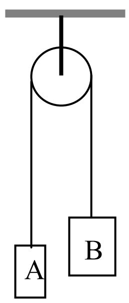
นั่นคือจุด D มีความเร็ว v เมตร/วินาที และความเร่งในแนวดิ่ง a เมตร/วินาที ^{2} เนื่องจากจุด D เป็นจุดที่อยู่บนรอก การเคลื่อนที่ของจุด D จึงเป็นการเคลื่อนที่ตามแนวเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งมีรัศมี R เมตร ความเร็วเชิงมุม ω และความเร่งเชิงมุม α ของจุด D ก็คือความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมของรอกนั่นเอง ซึ่งจะได้ว่า

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \text{เรเดียน/วินาที}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} \quad \text{เรเดียน/วินาที}^2$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 10 กล่อง A และกล่อง B มวล 5 และ 10 กิโลกรัม ตามลำดับ ผูกด้วยเชือกเบาคล้องผ่านรอกหมุนได้คล่องซึ่งมีรัศมี 0.1 เมตร มวล 2 กิโลกรัม เมื่อเริ่มต้นมวลทั้งสองอยู่นิ่ง ดังรูป 13 (ก)   ถ้าเชือกไม่มีการไถลไปบนผิวรอก จงหา



รูป 13 (ก)

(รอก $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$)

ก) แรงตึงเชือกที่ดึงมวล 5 กิโลกรัม

ข) แรงตึงเชือกที่ดึงมวล 10 กิโลกรัม

ค) ความเร่งของมวลทั้งสอง

ง) ความเร่งเชิงมุมของรอก

จ) จำนวนรอบที่รอกหมุนเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที

วิธีทำ สมมติให้กล่อง B เคลื่อนที่ลงด้วยความเร่ง a เมตร/วินาที ^{2}

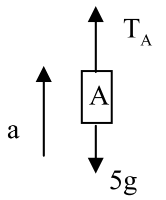
เนื่องจากเชือกไม่ยืดหรือหด ดังนั้น กล่อง A เคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่ง a เมตร/วินาที ^{2}

และ เนื่องจากเชือกไม่ไถลบนรอก จากตัวอย่างที่ 9 จะได้ว่าความเร่งเชิงมุมของรอกรอบแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของรอกและตั้งฉากกับกระดาษ   มีค่าเป็น

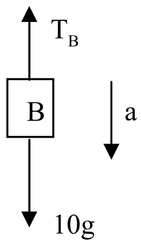
$$\alpha_{CM} = \frac{a}{R} = \frac{a}{0.1} \quad \text{เรเดียน/วินาที}^2 \text{ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ} \qquad (ก)$$

ผิวรอกเป็นผิวฝืดไม่ใช่ผิวลื่น เพราะถ้าผิวรอกลื่นเชือกจะไถลไปบนรอกโดยรอกจะไม่หมุน ดังนั้น แม้ว่าเชือกจะเป็นเชือกเบาแต่เมื่อสัมผัสกับผิวฝืดความตึงเชือกจึงไม่เท่ากันตลอดทั้งเส้น

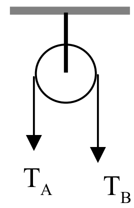
ให้แรงตึงเชือกส่วนที่อยู่ระหว่างกล่อง A กับรอกเป็น T_A และส่วนที่อยู่ระหว่างกล่อง B กับรอกเป็น T_B



(ข)



(ค)



(ง)

พิจารณาแรงที่กระทำต่อกล่อง A ดังรูป 13 (ข) จะได้ว่า

$$T_A - 49 = 5a \qquad (ข)$$

พิจารณาแรงที่กระทำต่อกล่อง B ดังรูป 13 (ค) จะได้ว่า

$$98 - T_B = 10a \qquad (ค)$$

พิจารณารอกและเชือกส่วนที่สัมผัสกับรอกเป็นระบบ ทอร์กรอบจุดศูนย์กลางรอกของแรงภายนอกระบบ ประกอบด้วย

$0.1\ T_A$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ (ขนานกับแกนหมุน)

$0.1\ T_B$ ทิศพุ่งเข้าในกระดาษ (ขนานกับแกนหมุน)

ถ้าให้ทิศพุ่งเข้าในกระดาษเป็นบวก จะได้ว่า

$$0.1T_B - 0.1\ T_A = I_{CM}\alpha_{CM} \qquad (ง)$$

แทนค่า $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ และ α_{CM} จากสมการ (ก) จะได้

$$0.1T_B - 0.1\ T_A = \left(\frac{1}{2}(2)(0.1)^2\right)\frac{a}{0.1} \qquad (จ)$$

จากสมการ (ข) (ค) และ (จ) จะได้

T_A	=	64.31	นิวตัน	คำตอบข้อ ก
T_B	=	67.38	นิวตัน	คำตอบข้อ ข
a	=	3.06	เมตร/วินาที ^{2}	คำตอบข้อ ค
$\alpha_{CM} = \frac{a}{0.1}$	=	30.6	เรเดียน/วินาที ^{2}	คำตอบข้อ ง

เนื่องจากความเร่งเชิงมุมคงตัว จากสูตร $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

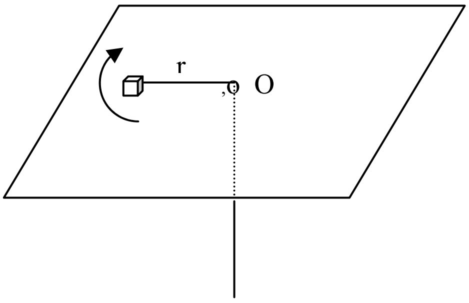
จะได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที

$$\theta = 0 + \frac{1}{2}(30.6)(3)^2 = 137.7 \text{ เรเดียน}$$

$$\text{จำนวนรอบ} = \frac{137.7}{2\pi} = 21.92 \text{ รอบ}$$ คำตอบข้อ จ

<u>หมายเหตุ</u> ถ้ารอกเบา คือ $I_{CM} \approx 0$ จากสมการ (ง) จะได้ว่า $T_A = T_B$ นั่นคือ แม้ผิวรอกส่วนที่สัมผัสกับเชือกเป็นผิวฝืด แต่ถ้ารอกเบาและหมุนได้คล่อง ถือได้ว่าแรงตึงเชือกเท่ากันทั้งเส้น

ตัวอย่างที่ 11 มวล 0.1 กิโลกรัม อยู่บนโต๊ะเกลี้ยงผูกกับเชือกที่ร้อยผ่านรูเกลี้ยง ดังรูป 14 เมื่อเริ่มต้นมวลหมุนรอบรูเป็นวงกลมรัศมี 0.3 เมตร ด้วยความเร็วเชิงมุม 2 เรเดียน/วินาที จากนั้นใช้มือดึงเชือกช้า ๆ ที่ปลายด้านล่างใต้โต๊ะจนรัศมีของการหมุนเป็น 0.25 เมตร



รูป 14

ก) โมเมนตัมเชิงมุมของมวล (รอบจุด O) หลังดึงเชือกเป็นเท่าใด

ข) พลังงานจลน์ของมวลเพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่าใด

ค) งานที่มือทำเป็นกี่จูล

วิธีทำ ก) ก่อนดึงเชือกโมเมนตัมเชิงมุมรอบรู (จุด O) = mvr = $m\omega r^2$ = $(0.1)(2)(0.3)^2$

= 1.8×10^{-2} กิโลกรัม-เมตร^2/วินาที ทิศของโมเมนตัมเชิงมุมพุ่งลงใต้โต๊ะ

แนวแรงที่เชือกดึงมวลผ่านจุด O ตลอดเวลา ดังนั้นทอร์กของแรงรอบจุด O จึงเป็นศูนย์

โมเมนตัมเชิงมุมของมวลรอบจุด O จึงคงตัวตลอดเวลา

ดังนั้น โมเมนตัมเชิงมุมของมวลหลังดึงเชือก = 1.8×10^{-2} กิโลกรัม-เมตร^2/วินาที ทิศพุ่งลงใต้โต๊ะ

คำตอบข้อ ก

ข) ก่อนดึงเชือกพลังงานจลน์ของมวล $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2$

$= \frac{1}{2}(0.1)(0.6)^2 = 1.8\times 10^{-2}$ จูล

เนื่องจากโมเมนตัมเชิงมุมของมวลรอบจุด O คงตัวตลอดเวลา ดังนั้น

โมเมนตัมเชิงมุมก่อนดึงเชือก = โมเมนตัมเชิงมุมหลังดึงเชือก

1.8×10^{-2} = (0.1)(v)(0.25)

ดังนั้น ความเร็วหลังดึงเชือก v = 0.72 เมตร/วินาที

และพลังงานจลน์หลังดึงเชือก $= \frac{1}{2}(0.1)(0.72)^2 = 2.592\times 10^{-2}$ จูล

แสดงว่า พลังงานจลน์เพิ่มขึ้น = 7.92×10^{-3} จูล คำตอบข้อ ข

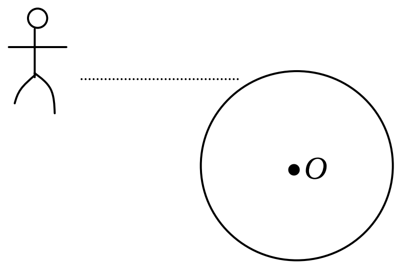
ค) พลังงานจลน์ที่เพิ่มขึ้น มาจากงานที่มือทำ ดังนั้น

งานที่มือทำ 7.92×10^{-3} จูล

คำตอบข้อ ค

ตัวอย่างที่ 12 ในรูป 15 ชายคนหนึ่งมวล 60 กิโลกรัม วิ่งด้วยความเร็ว 5 เมตร/วินาที ตามแนวเส้นสัมผัสของแผ่นจานขนาดใหญ่รัศมี 3 เมตร มวล 100 กิโลกรัม แล้วกระโดดขึ้นไปบนจาน ถ้าจานหมุนได้รอบแกนตรึงที่ตั้งฉากกับจานและผ่านจุดศูนย์กลางของจาน (จุด O) และเดิมจานอยู่นิ่ง เมื่อคนขึ้นไปอยู่บนจานและเคลื่อนที่ไปพร้อม ๆ กัน จงหาความเร็วเชิงมุมของคนและจาน

วิธีทำ



รูป 15

หลังจากที่คนขึ้นไปอยู่บนจาน ทั้งคนและจานจะหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับจานและผ่านจุด O ซึ่งแม้ไม่ใช่แกนที่ผ่าน CM ของระบบ (คน+จาน) แต่เป็นแกนตรึง ดังนั้น เราจะใช้แกนนี้เป็นแกนหมุน และเมื่อดูสมการ

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

ถ้าทอร์กของแรงภายนอกรอบจุด O ในองค์ประกอบที่ขนานกับแกนหมุน เป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงมุมในองค์ประกอบที่ขนานกับแกนหมุนก็ต้องคงที่

พิจารณาคนและจานเป็นระบบ เมื่อคนกระโดดเหยียบจานจะมีแรงที่จานกระทำต่อเท้าคน และแรงที่เท้าคนกระทำต่อจาน แต่แรงทั้งสองเป็นแรงภายในระบบ ซึ่งทอร์กของแรงภายในระบบไม่ทำให้โมเมนตัมเชิงมุมของระบบเปลี่ยนแปลง

แรงภายนอกระบบประกอบด้วย

แรงโน้มถ่วง แต่ไม่ทำให้เกิดทอร์กรอบจุด O ในแนวขนานกับแกนหมุน

แรงที่แกนทำต่อจาน (แกนอาจเป็นเพลากลม เราถือว่าเล็กมากและเสียบผ่านจุด O) แต่ไม่มีทอร์กเช่นกัน เพราะระยะทางจากแรงไปยังจุด Oมีค่าเป็นศูนย์

ดังนั้น ไม่มีทอร์กในแนวขนานกับแกนหมุนของแรงภายนอกระบบ โมเมนตัมเชิงมุมในแนวขนานกับแกนหมุน จึงคงที่

--พิจารณาขณะที่คนลอยในอากาศ และกำลังจะเหยียบจาน

ก่อนคนเหยียบจาน โมเมนตัมเชิงมุมของระบบในแนวขนานกับแกนหมุนมีแต่โมเมนตัมเชิงมุมของคน ซึ่งเท่ากับ mvr = (60)(5)(3) = 900 กิโลกรัม-เมตร^2/วินาที

ถ้าจานวางในระนาบของกระดาษดังรูป 13 ทิศของโมเมนตัมเชิงมุมจะพุ่งเข้าในกระดาษและจะขนานกับแกนหมุน

หลังเหยียบจาน โมเมนต์ความเฉื่อยของคน + จาน $= (60)(3)^2 + \frac{1}{2}(100)(3)^2$

$= 990$ กิโลกรัม-เมตร^2

หลังเหยียบจาน ให้ความเร็วเชิงมุมของคนและจาน $= \omega$ เรเดียน/วินาที

เนื่องจาก โมเมนตัมเชิงมุมของระบบในแนวขนานกับแกนหมุนคงตัว คือ

โมเมนตัมเชิงมุมก่อนเหยียบ = โมเมนตัมเชิงมุมหลังเหยียบ

$$900 = 990\,\omega$$

$$\omega = \frac{10}{11} \text{ เรเดียน/วินาที} \qquad \text{ตอบ}$$

<u>หมายเหตุ</u> ทิศและขนาดทอร์กของแรงโน้มถ่วงที่กระทำต่อคนและจาน คิดรอบจุด O ในรูป 15 หาได้จาก $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

เมื่อ $\vec{r}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งเทียบกับจุด O ดังนั้น

ทอร์กของแรงโน้มถ่วงที่กระทำต่อคน $= (3)(60)(9.8) = 1764$ นิวตัน-เมตร ทิศตั้งฉากกับแกนหมุน

และเนื่องจากแรงโน้มถ่วงที่กระทำต่อจาน คิดได้คล้ายกับว่ากระทำที่จุด O ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางมวลของจาน ดังนั้น ทอร์กของแรงโน้มถ่วงที่กระทำต่อจาน คิดรอบจุด O จึงมีค่าเป็นศูนย์

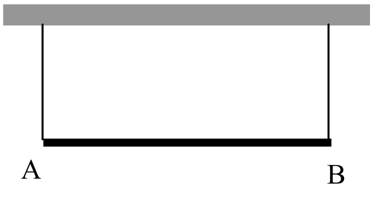
จะเห็นว่าไม่มีทอร์กของแรงภายนอกระบบในแนวขนานกับแกนหมุน

ตัวอย่างที่ 13 ไม้สม่ำเสมอมวล 5 กิโลกรัม ยาว 2 เมตร ผูกปลายทั้งสองด้วยเชือกห้อยไว้กับเพดาน ทำให้ไม้อยู่ในแนวระดับ ดังรูป 16 (ก) ตัดเชือกเส้นขวาให้ขาด ทันทีที่เชือกขาด จงหา

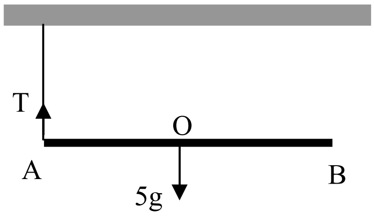
ก) แรงตึงเชือกของเชือกเส้นซ้าย

ข) ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล O

ค) ความเร่งของปลาย B



รูป 16 (ก)



(ข)

<u>วิธีทำ</u>

ก)ให้ α_A เป็นความเร่งเชิงมุมของไม้รอบแกนที่ตั้งฉากกับกระดาษ และผ่านจุด A ในทันทีที่เชือกขาดนั้นจุด A ไม่มีความเร่ง จึงใช้สมการ $\tau = I\alpha$ ได้ คือ

$$\tau_A = I_A \alpha_A$$

$$(5)(9.8)(1) = \left[\frac{1}{3}(5)2^2\right]\alpha_A$$

$$\alpha_A = 7.35 \quad \text{เรเดียน/วินาที}^2$$

ทันทีที่เชือกขาด ทุกตำแหน่งของไม้ต่างก็มีความเร่ง ยกเว้นจุด A อย่างไรก็ตาม ได้กล่าวมาแล้วว่า แกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุด O ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางมวล สามารถใช้สมการ $\tau = I\alpha$ ได้ ถึงแม้แกนนี้จะมีความเร่ง โดยความเร่งเชิงมุม α_O รอบแกนที่ผ่านจุด O นี้ เท่ากับ ความเร่งเชิงมุมรอบแกนที่ผ่านจุด A

ดังนั้น $\alpha_O = 7.35$ เรเดียน/วินาที^{2}

เพราะว่า $\tau_O = I_O\alpha_O$

จะได้ $T(1) = \left[\frac{1}{12}(5)2^2\right]7.35$

$T = 12.25$ นิวตัน คำตอบข้อ ก

ข) ให้ A เป็นจุดหมุน จาก $a = \alpha R$ เมื่อพิจารณาว่าจุด O หมุนรอบจุด A จะได้ว่า

ความเร่งของจุด O $= 7.35(1) = 7.35$ เมตร/วินาที^{2} คำตอบข้อ ข

ค) ทำนองเดียวกัน ความเร่งของจุด B $= 7.35(2) = 14.7$ เมตร/วินาที^{2} คำตอบข้อ ค

<u>หมายเหตุ</u> ความเร่งของจุด O ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางมวล อาจหาจาก $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$ คือ

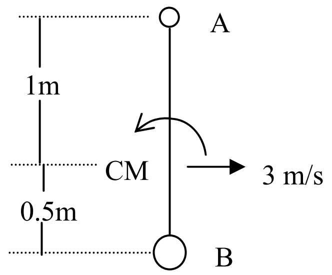
$$49 - 12.25 = 5a$$

$$a = 7.35 \quad \text{เมตร/วินาที}^2$$

---ตัวอย่างที่ 14-17 จะเป็นตัวอย่างเพื่อให้เข้าใจการคำนวณพลังงานจลน์ของวัตถุแข็งเกร็ง

ตัวอย่างที่ 14

วัตถุแข็งเกร็งประกอบด้วยลูกกลม A มวล 1 กิโลกรัม ลูกกลม B มวล 2 กิโลกรัม และคานเบายาว 1.5 เมตร โดยลูกกลมทั้งสองยึดติดกับปลายคาน ดังรูป 17 ถ้าจุดศูนย์กลางมวลมีความเร็ว 3 เมตร/วินาที โดยคานหมุนทวนเข็มนาฬิการอบแกนที่ตั้งฉากกับหน้ากระดาษและผ่านจุดศูนย์กลางมวลด้วยความเร็วเชิงมุม 1 เรเดียน/วินาที จงคำนวณพลังงานจลน์ของวัตถุนี้



รูป 17

ก) โดยตรงจากสูตร $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

ข) โดยใช้สมการ $E_k = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega^2$

<u>วิธีทำ</u>

CM จะอยู่ห่างจากจุด B เป็นระยะทาง = $\frac{2(0)+1(1.5)}{2+1}$ = 0.5 เมตร

ก) จาก v = ωR จะได้ว่า

ความเร็วของ A เทียบกับ CM = (1)(1) = 1 เมตร/วินาที ทิศไปทางซ้าย

และความเร็วของ B เทียบกับ CM = (1)(0.5) = 0.5 เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา

เนื่องจากความเร็วของ CM = 3 เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา ดังนั้น จะได้ว่า

ความเร็วของ A คือ v_A = 3 – 1 = 2 เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา

ความเร็วของ B คือ v_B = 3 + 0.5 = 3.5 เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา

พลังงานจลน์ของระบบ $= \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}(1)(2)^2 + \frac{1}{2}(2)(3.5)^2$

= 14.25 จูล คำตอบข้อ ก

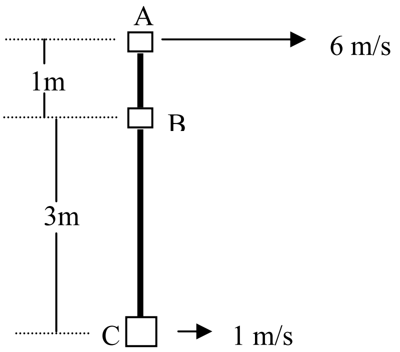
ข) จาก $E_k = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2$

โดย $I_{CM} = \sum m_i r_i^2$ = $(1)(1)^2 + (2)(0.5)^2$ = 1.5 กิโลกรัม-เมตร ^{2}

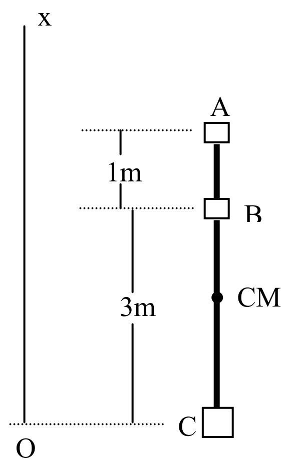
ดังนั้น $E_k = \frac{1}{2}(1+2)(3)^2 + \frac{1}{2}(1.5)(1)^2$ = 14.25 จูล คำตอบข้อ ข

จะเห็นว่าได้คำตอบเท่ากันกับข้อ ก)

ตัวอย่างที่ 15 กล่อง A , B และ C มวล 2 , 2 และ 4 กิโลกรัม ตามลำดับ ติดกับคานเบายาว 4 เมตร รวมกันเป็นวัตถุแข็งเกร็งอันหนึ่ง ณ เวลาหนึ่งพบว่าคานอยู่ในแนวดิ่ง โดยกล่อง A และกล่อง C มีความเร็ว 6 และ 1 เมตร/วินาที ตามลำดับ ทิศไปทางขวามือ ดังรูป 18 (ก)



รูป 18 (ก)



(ข)

จงหา

ก) ตำแหน่งของ CM

ข) ความเร็วเชิงมุมที่วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับกระดาษ และผ่าน CM

ค) ความเร็วของ CM

ง) พลังงานจลน์ของวัตถุแข็งเกร็งโดยใช้สมการ $E_k = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega^2$

จ) ความเร็วของกล่อง B

ฉ) พลังงานจลน์ของวัตถุแข็งเกร็ง โดยตรงจากสูตร $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

วิธีทำ

ก) ตั้งแกน x ในแนวดิ่ง ให้จุดกำเนิดอยู่ที่กล่อง C ดังรูป 16 (ข) จะได้ว่า

$$x_{CM} = \frac{(4)(0)+(2)(3)+(2)(4)}{4+2+2} = 1.75 \text{ เมตร}$$

ดังนั้น CM อยู่ห่างจากกล่อง C เป็นระยะทาง 1.75 เมตร คำตอบข้อ ก

ข) ความเร็วของกล่อง A เทียบกับกล่อง C = 6 – 1 = 5 เมตร/วินาที ทิศไปทางขวามือ

จึงพิจารณาได้ว่า กล่อง A หมุนรอบกล่อง C ด้วยความเร็วเชิงมุม ω โดย

$$\omega = \frac{5}{4} = 1.25 \text{ เรเดียน/วินาที ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ}$$

นั่นคือ วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับหน้ากระดาษและผ่านกล่อง C ด้วยความเร็วเชิงมุม 1.25 เรเดียน/วินาที ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ

แต่เรารู้ว่า ถ้าวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกน ๆ หนึ่งด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ แล้ว จะสามารถพิจารณาได้ว่า วัตถุแข็งเกร็งนี้หมุนรอบแกนอื่น ๆ ซึ่งอยู่ในวัตถุแข็งเกร็งและขนานกับแกนเดิมด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ เดียวกัน

ดังนั้น ความเร็วเชิงมุมที่วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับกระดาษ และผ่าน CM มีค่าเป็น 1.25 เรเดียน/วินาที ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ คำตอบข้อ ข

ค) ความเร็วของ CM เทียบกับกล่อง C หาได้จากสูตร $v = \omega R = (1.25)(1.75)$

$= 2.1875$ เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา

แต่กล่อง C มีความเร็ว 1 เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา ดังนั้น จะได้ว่า ความเร็วของ CM

$v_{CM} = 2.1875 + 1 = 3.1875$ เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา คำตอบข้อ ค

ง) จาก $E_k = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2$

$$= \frac{1}{2}(2+2+4)(3.1875)^2 + \frac{1}{2}\left\{2(2.25)^2 + 2(1.25)^2 + 4(1.75)^2\right\}(1.25)^2$$

$= 60.5625$ จูล คำตอบข้อ ง

จ) กล่อง B หมุนรอบกล่อง C ด้วยความเร็วเชิงมุม 1.25 เรเดียน/วินาที ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ
ดังนั้น ความเร็วของกล่อง B เทียบกับกล่อง C = (1.25)(3) = 3.75 เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา
แต่กล่อง C มีความเร็ว 1 เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา ดังนั้น จะได้ว่า
ความเร็วของกล่อง B = 3.75 + 1 = 4.75 เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา คำตอบข้อ จ

ฉ) เพราะว่า
$$E_k = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 + \frac{1}{2}m_C v_C^2$$
$$= \frac{1}{2}(2)(6)^2 + \frac{1}{2}(2)(3.75)^2 + \frac{1}{2}(4)(1)^2$$
$$= 60.5625 \text{ จูล}$$
คำตอบข้อ ฉ

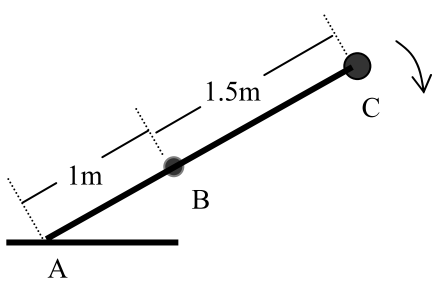
จะเห็นว่าเท่ากับคำตอบข้อ ง)

คำถาม จากตัวอย่างที่ 15 กล่อง A มีความเร็ว 6 เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา และ
กล่อง B มีความเร็ว 4.75 เมตร/วินาที ทิศไปทางขวา โดยกล่องทั้งสองอยู่ห่างกัน 1 เมตร
ถ้าพิจารณาว่ากล่อง B หมุนรอบกล่อง A จงหาความเร็วเชิงมุมในการหมุนนี้

คำตอบ ความเร็วของกล่อง B เทียบกับกล่อง A = 4.75 – 6 = -1.25 เมตร/วินาที
คือขนาดเป็น 1.25 เมตร/วินาที ทิศไปทางซ้ายมือ ถ้ากำมือขวาให้นิ้วทั้งสี่ไปไปตามทิศของความเร็ว
คือไปทางซ้ายมือ หัวแม่มือจะพุ่งเข้าไปในกระดาษ แสดงว่าทิศของความเร็วเชิงมุมพุ่งเข้าไปใน
กระดาษ
ดังนั้น กล่อง B หมุนรอบกล่อง A ด้วยความเร็วเชิงมุม
$$\omega = \frac{1.25}{1} = 1.25 \text{ เรเดียน/วินาที}$$
ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ

ตัวอย่างที่ 16

วัตถุแข็งเกร็งประกอบด้วยลูกกลม B มวล 1 กิโลกรัม ลูกกลม C มวล 2 กิโลกรัม ยึดติดกับคานเบา
ยาว 2.5 เมตร โดยปลาย A ของคานติดกับบานพับ ดังรูป 19 ถ้าคานหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับ
กระดาษและผ่านปลาย A ด้วยความเร็วเชิงมุม 2 เรเดียน/วินาที ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ จงหา
พลังงานจลน์ของวัตถุนี้



รูป 19

<u>วิธีทำ</u>

วิธีที่ 1 พิจารณาว่าวัตถุนี้หมุนรอบแกนหมุนตรึงของบานพับ แกนนี้ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุด A

ในกรณีแกนหมุนตรึง $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ จะได้ว่า

$$E_k = \frac{1}{2}\left((1)(1)^2 + (2)(2.5)^2\right)(2)^2 = 27 \quad \text{จูล}$$

วิธีที่ 2

CM ของวัตถุนี้ อยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะทาง 2 เมตร ความเร็วของ CM หาได้จากสมการ $v = \omega R$ คือ

$$v_{CM} = (2)(2) = 4 \quad \text{เมตร/วินาที}$$

จาก $E_k = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2$

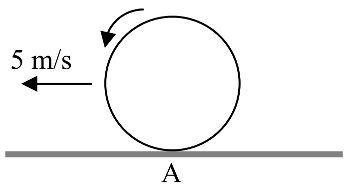
เนื่องจาก ความเร็วเชิงมุมที่วัตถุหมุนรอบแกนที่ผ่าน CM เท่ากับความเร็วเชิงมุมที่วัตถุหมุนรอบแกนที่ผ่านจุด A ดังนั้น $\omega_{CM} = 2$ เรเดียน/วินาที และจะได้ว่า

$$E_k = \frac{1}{2}\left((1+2)(4)^2\right) + \frac{1}{2}\left((1)(1)^2 + (2)(0.5)^2\right)(2)^2 = 27 \text{ จูล} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 17 ทรงกระบอกบางรัศมี 0.1 เมตร มวล 4 กิโลกรัม กลิ้งโดยไม่ไถล โดยจุดศูนย์กลางมวลมีความเร็ว 5 เมตร/วินาที ดังรูป 20 จงหาพลังงานจลน์ของทรงกระบอก (ทรงกระบอกบาง $I_{CM} = MR^2$)

<u>วิธีทำ</u>

วิธีที่ 1



รูป 20

พิจารณาว่าทรงกระบอกมีทั้งการเลื่อนที่และการหมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

เนื่องจาก $v_{CM} = 5$ เมตร/วินาที

จะได้ ความเร็วเชิงมุมรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

$$\omega_{CM} = \frac{5}{0.1} = 50 \quad \text{เรเดียน/วินาที}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2 \\ &= \frac{1}{2}(4)(5)^2 + \frac{1}{2}\left[(4)(0.1)^2\right](50)^2 \\ &= 100 \quad \text{จูล} \end{aligned}$$

วิธีที่ 2

เนื่องจากจุด A บนทรงกระบอกที่ทรงกระบอกแตะพื้นนั้นอยู่นิ่ง(ชั่วขณะ) จึงอาจพิจารณาได้ว่าทรงกระบอกหมุนรอบแกนที่ผ่านจุด A เพียงอย่างเดียวโดยไม่มีการเลื่อนที่

จากวิธีที่ 1 $\omega_{CM} = 50$ เรเดียน/วินาที

ดังนั้น ความเร็วเชิงมุมที่ทรงกระบอกหมุนรอบแกนที่ผ่านจุด A คือ $\omega_A = 50$ เรเดียน/วินาที ด้วยเช่นกัน

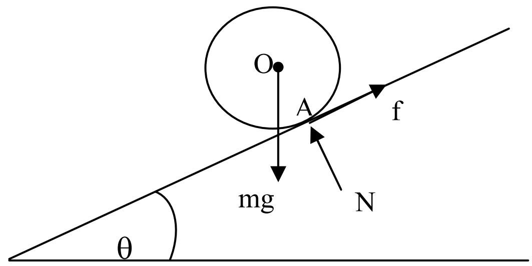
พลังงานจลน์ของการหมุนรอบแกนตรึงที่ผ่านจุด A หาได้จาก

$$E_k = \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 = \frac{1}{2}\left[I_{CM} + 4(0.1)^2\right](50)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[4(0.1)^2 + 4(0.1)^2\right](50)^2$$

$= 100$ จูล เท่ากับวิธีแรก ตอบ

ตัวอย่างที่ 18 ทรงกระบอกตัน มวล m รัศมี 0.1 เมตร อยู่นิ่งสูงจากพื้นราบ 1 เมตร จากนั้นกลิ้งโดยไม่ไถลลงตามพื้นเอียงทำมุม θ กับแนวระดับ ดังรูป 21 จงหาว่า จุดศูนย์กลางมวลทรงกระบอกมีความเร็วเท่าใดเมื่อลงมาถึงพื้นราบ (ทรงกระบอกตัน $I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2$)



รูป 21

วิธีทำ

วิธีที่ 1 จะใช้กฎการอนุรักษ์พลังงาน

เนื่องจากทรงกระบอกกลิ้งโดยไม่ไถล แสดงว่าจุด A บนทรงกระบอกที่แตะพื้นเอียงจะอยู่นิ่ง(แต่มีความเร่งพุ่งเข้าหาจุด O)เมื่อเทียบกับพื้นเอียง แรงเสียดทานเป็นแรงเสียดทานสถิตซึ่งไม่ทำให้ทรงกระบอกได้รับหรือสูญเสียพลังงาน แรงตั้งฉาก N ก็ไม่ได้ทำงานบนทรงกระบอก เพราะทิศของแรงตั้งฉากกับแนวการเคลื่อนที่ตลอดเวลา พลังงานกลของทรงกระบอกจึงคงตัว

พิจารณาว่าทรงกระบอกหมุนรอบแกนที่ผ่านจุด A ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω_A

ดังนั้น พลังงานจลน์ของทรงกระบอก มีค่าเป็น

$$E_k = \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 = \frac{1}{2}(I_{CM} + m(0.1)^2)\omega_A^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}m(0.1)^2 + m(0.1)^2\right]\omega_A^2$$

$$= \quad 0.0075\, m\,\omega_A^2 \quad \text{จูล}$$

เนื่องจากไม่มีการสูญเสียพลังงาน แสดงว่า

พลังงานกลเริ่มต้น = พลังงานกลสุดท้าย

ให้พื้นราบเป็นระดับอ้างอิงพลังงานศักย์โน้มถ่วง ดังนั้น

$$m\,(9.8)(1) = 0.0075\, m\,\omega_A^2$$

$$\omega_A = 36.15 \quad \text{เรเดียน/วินาที}$$

เพราะว่า $v_{CM} = \omega_{CM} R$

แต่ความเร็วเชิงมุมรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล คือ ω_{CM} มีค่าเท่ากับความเร็วเชิงมุมรอบแกนที่ผ่านจุด A คือ ω_A ดังนั้น จะได้ว่า

$$v_{CM} = (36.15)(0.1)$$

$$= 3.615 \quad \text{เมตร/วินาที} \qquad \text{ตอบ}$$

วิธีที่ 2 จะใช้ทอร์กเพื่อหาความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล

พิจารณาว่าทรงกระบอกหมุนรอบแกนที่ผ่านจุด A ซึ่งความเร่งพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางมวล ดังนั้น

$$\tau_A = I_A \alpha_A$$

$$(mg\sin\theta)R = (I_{CM} + mR^2)\alpha_A$$

$$(mg\sin\theta)(0.1) = \left[\frac{1}{2}m(0.1)^2 + m(0.1)^2\right]\alpha_A$$

$$\alpha_A = 65.33\sin\theta \quad \text{เรเดียน/วินาที}^2$$

เพราะว่า $a_{CM} = \alpha_{CM} R$

แต่ความเร่งเชิงมุมรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล คือ α_{CM} มีค่าเท่ากับความเร่งเชิงมุมรอบแกนที่ผ่านจุด A คือ α_A ดังนั้น จะได้ว่า

$$a_{CM} = (65.33)(0.1)\sin\theta$$

$$= 6.533\sin\theta \quad \text{เมตร/วินาที}^2$$

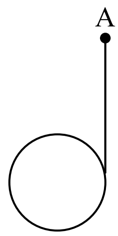
เมื่อเริ่มต้น ทรงกระบอกอยู่สูงจากพื้น 1 เมตร ดังนั้นระยะทางที่ทรงกระบอกเคลื่อนที่บนพื้นเอียงก่อนถึงพื้นราบมีค่าเป็น $\frac{1}{\sin\theta}$ เมตร

เนื่องจาก a_{CM} คงตัว เมื่อใช้สมการ $v^2 = u^2 + 2aS$ จะได้ว่า

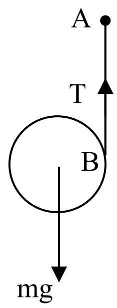
$$v_{CM}^2 = 0 + 2(6.533\sin\theta).\frac{1}{\sin\theta}$$

$$v_{CM} = 3.615 \quad \text{เมตร/วินาที} \qquad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 19 แท่งโลหะทรงกระบอกมวล 1 กิโลกรัม รัศมี 0.2 เมตร มีเชือกพันรอบผิวนอก จับปลาย A ให้อยู่นิ่ง ปล่อยให้เคลื่อนที่ในแนวดิ่ง ดังรูป 22 (ก) แท่งโลหะจะหมุนรอบตัวเอง โดยระนาบของการหมุนคงตัวตลอดการเคลื่อนที่จนจุดศูนย์กลางมวลต่ำกว่าเดิม 1 เมตร จงหาความเร็วของแท่งโลหะ



รูป 22 (ก)



(ข)

วิธีที่ 1 ให้จุด B เป็นจุดบนทรงกระบอกที่แตะเชือกที่เวลาใด ๆ ดังรูป 22 (ข) ความเร่งในแนวดิ่งของจุด B เป็นศูนย์(ความเร่งในแนวดิ่งของ B = ความเร่งของ CM+ความเร่งของ B เทียบกับCM ; ความเร่งของ CM = 0.2 ω ทิศลง ; ความเร่งของ B เทียบกับCM = 0.2 ω ทิศขึ้น ความเร่งในแนวดิ่งของ B จึงเป็นศูนย์) มีแต่ความเร่งในแนวที่พุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางมวล จึงสามารถใช้สมการ $\tau = I\alpha$ กับแกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุด B คือ

$$\tau_B = I_B\,\alpha_B$$

$$(1)(9.8)(0.2) = \left\{ I_{CM} + (1)(0.2)^2 \right\} \alpha_B$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}(1)(0.2)^2 + (1)(0.2)^2 \right\} \alpha_B$$

$$\alpha_B = 32.67 \quad \text{เรเดียน/วินาที}^2$$

นั่นคือ ทุก ๆ จุดบนทรงกระบอกจะมีความเร่งเชิงมุม 32.67 เรเดียน/วินาที^{2} รอบแกนหมุนที่ผ่านจุด B นี้ เนื่องจากจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกอยู่ห่างจากจุด B เป็นระยะ 0.2 เมตร ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล หาได้จาก

$$a = \alpha R$$

ดังนั้น $$a_{CM} = (32.67)(0.2)$$

$$= 6.53 \quad \text{เมตร/วินาที}^2$$

เนื่องจากความเร่งคงตัวใช้สมการ $v^2 = u^2 + 2aS$ จะได้

$$v_{CM}^2 = 0 + 2(6.53)(1)$$

$$v_{CM} = 3.61 \quad \text{เมตร/วินาที}$$ ตอบ

วิธีที่ 2

ถ้าดูทั้งเชือกและทรงกระบอกเป็นระบบ พลังงานของระบบมีแต่พลังงานกล แต่เชือกเป็นเชือกเบา ระบบจึงมีแต่พลังงานกลของทรงกระบอก เนื่องจากจับปลาย A ให้อยู่นิ่ง มือไม่ได้ทำงาน งานที่ทำต่อระบบเป็นศูนย์ พลังงานกลของทรงกระบอกจึงคงตัว

ให้แนวระดับที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล เมื่อตอนเริ่มปล่อยทรงกระบอกเป็นระดับอ้างอิงพลังงานศักย์โน้มถ่วง

ดังนั้น พลังงานกลเริ่มต้นเป็นศูนย์

พลังงานกลสุดท้าย ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ

พลังงานศักย์โน้มถ่วง $= -(1)(9.8)(1)$

$= -9.8$ จูล

และ พลังงานจลน์ของทรงกระบอก โดยถ้าพิจารณาว่าทรงกระบอกหมุนรอบแกนซึ่งผ่านจุด B โดยไม่มีการเลื่อนที่ จะได้ว่า

$$E_k = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(1)(0.2)^2 + (1)(0.2)^2\right\}\omega_B^2$$

$$= 0.03\ \omega_B^2 \quad \text{จูล}$$

เนื่องจากพลังงานกลคงตัวคือ

พลังงานกลเริ่มต้น = พลังงานกลสุดท้าย

$0 = -9.8 + 0.03\ \omega_B^2$

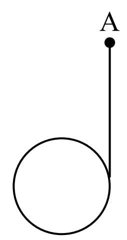
$\omega_B = 18.07$ เรเดียน/วินาที

เนื่องจาก $v = \omega R$

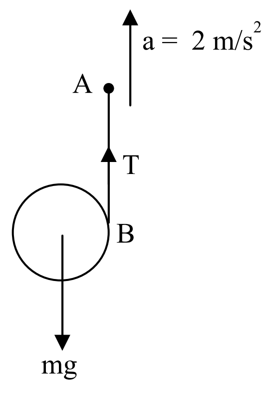
จะได้ $v_{CM} = (18.07)(0.2)$

$= 3.61$ เมตร/วินาที ตอบ

ตัวอย่างที่ 20 แท่งโลหะทรงกระบอกมวล 1 กิโลกรัม รัศมี 0.1 เมตร มีเชือกพันรอบผิวนอก เมื่อเริ่มต้นทรงกระบอกอยู่นิ่ง สูงจากพื้น 5 เมตร ใช้มือดึงปลายเชือก A ขึ้นด้วยความเร่ง 2 เมตร/วินาที ^{2} ดังรูป 23 (ก) ทำให้ระนาบของการหมุนคงตัวตลอดการเคลื่อนที่ เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที จงหา



รูป 23 (ก)



(ข)

ก) ความเร็วของทรงกระบอก ข) ทรงกระบอกอยู่สูงจากพื้นกี่เมตร

ค) พลังงานกลของทรงกระบอกเปลี่ยนไปจากเดิมเท่าใด ง) งานที่มือทำ

วิธีทำ

ให้จุด B เป็นจุดบนทรงกระบอกที่แตะเชือกที่เวลาใด ๆ

ขณะนี้เราไม่รู้ว่าความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกมีทิศขึ้นหรือลง เราจะสมมติว่ามีทิศลง

จาก $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{CM}$ ดังนั้น จะได้ว่า mg มีค่าเป็นบวก และ T มีค่าเป็นลบ คือ

$$1(9.8) - T = 1a_{CM} \quad \text{(ก)}$$

คราวนี้จุด B มีความเร่งในแนวดิ่งด้วย ความเร่งของจุด B จึงไม่ได้พุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางมวล ดังนั้น สมการ $\tau = I\alpha$ ใช้ได้กับแกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุดศูนย์กลางมวลเท่านั้น คือ

$$\tau_{CM} = I_{CM}\alpha_{CM}$$

$$(0.1)\,T = \left\{\frac{1}{2}(1)(0.1)^2\right\}\alpha_{CM}$$

$$T = 0.05\,\alpha_{CM} \quad \text{(ข)}$$

ที่เวลาใด ๆ ความเร่งในแนวดิ่งของจุด B และจุด A มีค่าเท่ากัน คือ 2 เมตร/วินาที ^{2} ทิศขึ้นโดยความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลเทียบกับจุดB คือ (0.1) α_{CM} เมตร/วินาที ^{2} มีทิศลง เนื่องจากเราสมมติว่าจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกมีทิศลง ดังนั้น

$$a_{CM} = 0.1\alpha_{CM} - 2 \quad \text{(ค)}$$

จากสมการ (ก) (ข) และ (ค) จะได้

$T = 3.9333$ นิวตัน

$\alpha_{CM} = 78.6667$ เรเดียน/วินาที ^{2}

$a_{CM} = 5.8667$ เมตร/วินาที ^{2} ทิศพุ่งลง

เนื่องจาก ความเร่ง a_{CM} คงตัว จึงใช้สมการ $v = u + at$ ได้ ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที จะได้

$v_{CM} = 0 + 5.8667(1) = 5.8667$ เมตร/วินาที คำตอบข้อ ก

เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที ทรงกระบอกเคลื่อนที่ลงเป็นระยะทาง

$S = 0 + \frac{1}{2}(5.8667)(1)^2 = 2.9334$ เมตร

ดังนั้น ทรงกระบอกอยู่สูงจากพื้น $5 - 2.9334 = 2.0666$ เมตร คำตอบข้อ ข

ความเร่งเชิงมุม α_{CM} คงตัว จึงใช้สมการ $\omega = \omega_0 + \alpha t$ ได้ ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที จะได้

$\omega = 0 + 78.6667(1) = 78.6667$ เรเดียน/วินาที

ใช้แนวระดับที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกเมื่อตอนเริ่มต้นเป็นระดับอ้างอิงพลังงานศักย์โน้มถ่วง โดยเมื่อเริ่มต้นกระบอกอยู่นิ่ง จะได้

พลังงานกลเมื่อเริ่มต้น = 0

พลังงานศักย์สุดท้าย = -(1)(9.8)(2.9334) = -28.7473 จูล

และ พลังงานจลน์สุดท้าย $= \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$

$$= \frac{1}{2}(1)(5.8667)^2 + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(1)(0.1)^2\right\}(78.6667)^2$$

= 32.6802 จูล

จะได้ว่า พลังงานกลสุดท้าย = (-28.7473 + 32.6802) = 3.9329 จูล

นั่นคือ พลังงานกลเพิ่มขึ้น = 3.9329 - 0 = 3.9329 จูล คำตอบข้อ ค

เนื่องจาก มือเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง 2 เมตร/วินาที ^{2} เป็นเวลา 1 วินาที

ดังนั้น ระยะทางที่มือเคลื่อนที่ $= \frac{1}{2}(2)(1)^2 = 1$ เมตร

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 แรงที่มือดึงเชือกเท่ากับแรงที่เชือกดึงมือ (แรงตึงเชือก) คือ 3.93 นิวตัน

ดังนั้น งานที่มือทำ = (3.9333)(1) = 3.9333 จูล

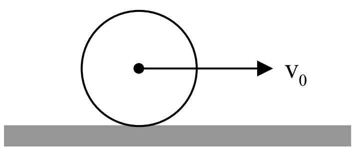
จะเห็นว่าพลังงานกลของทรงกระบอกที่เพิ่มขึ้นได้มาจากงานของมือ ที่ต่างกันเพราะการปัดเศษ

คำตอบข้อ ง

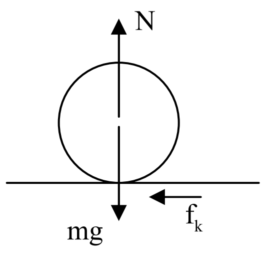
ตัวอย่างที่ 21 ทรงกลมมวล m รัศมี R เมื่อเริ่มต้นถูกโยนโดยไม่หมุนไปในแนวราบด้วยความเร็วต้น v_0 ไปบนพื้นราบ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างพื้นกับทรงกลมเป็น μ_k ดังรูป 24 (ก) จากนั้นทรงกลมไถลไปตามพื้นโดยทิศของความเร็วเชิงมุมไม่เปลี่ยน จงหา

ก) เวลา t หลังจากโยน ที่ทรงกลมเริ่มกลิ้งโดยไม่ไถล

ข) ความเร็วเชิงเส้นและเชิงมุมของทรงกลม เมื่อเวลา t



รูป 24 (ก)



(ข)

วิธีทำ

แรงที่กระทำต่อทรงกลม แสดงดังรูป 22 (ข)

จาก $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$

ในแนวดิ่ง $\vec{a}_{CM} = 0$ ดังนั้น

$$N - mg = 0$$

$$N = mg$$

ให้ a เป็นความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลในแนวระดับ จะได้

$$f_k = ma$$

$$a = \frac{f_k}{m} \qquad (ก)$$

ทิศของความเร่งไปทางซ้ายตามทิศของ f_k

เพราะว่า $f_k = \mu_k N = \mu_k mg \qquad (ข)$

แทน (ข) ใน (ก) จะได้

$$a = \mu_k g \qquad (ค)$$

เนื่องจากทุกจุดบนทรงกลมมีความเร่ง สมการ $\tau = I\alpha$ จึงใช้ได้เฉพาะแกนหมุนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุดศูนย์กลางมวล คือ

$$\tau_{CM} = I_{CM}\alpha_{CM}$$

$$f_k R = \frac{2}{5} mR^2 \alpha_{CM} \qquad (ง)$$

จากสมการ (ข) และ (ง) จะได้

$$\alpha_{CM} = \frac{5\mu_k g}{2R} \qquad (จ)$$

จากสมการ (ค) $a = \mu_k g$ ซึ่งคงตัว ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป t ความเร็ว

$$v = v_0 - \mu_k g t \qquad (ฉ)$$

ทำนองเดียวกัน ความเร่งเชิงมุม $\alpha_{CM} = \frac{5\mu_k g}{2R}$ คงตัว ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป t ความเร็วเชิงมุม

$$\omega = 0 + \frac{5\mu_k g}{2R} t \qquad (ช)$$

ทรงกลมกลิ้งโดยไม่ไถล เมื่อ $v = \omega R$ ดังนั้น จาก (ฉ) และ (ช) จะได้

$$v_0 - \mu_k g t = \frac{5\mu_k g}{2R} tR$$

$$t = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_k g}$$ คำตอบข้อ ก

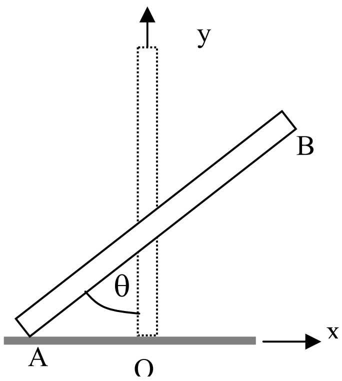
แทนค่า t ลงในสมการ (ฉ) และ (ช) จะได้

ความเร็วเชิงเส้น $= \frac{5}{7} v_0$

ความเร็วเชิงมุม $= \frac{5}{7}\frac{v_0}{R}$ คำตอบข้อ ข

ตัวอย่างที่ 22 ไม้สม่ำเสมอ ยาว L มวล m ตั้งอยู่บนพื้นลื่นในแนวดิ่ง ต่อมาผลักท่อนไม้นี้จากแนวดิ่งเล็กน้อย แล้วปล่อยให้ล้มเอง จงหาอัตราเร็วเชิงมุมของท่อนไม้ รอบแกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุดศูนย์กลางมวล ขณะที่ไม้กำลังจะฟาดพื้น

วิธีทำ



รูป 25

ตั้งแกน x และ y โดยเมื่อเริ่มต้นให้ไม้อยู่ในแนวแกน y ดังรูป 25

เนื่องจากพื้นลื่น แสดงว่าไม่มีแรงในแนวระดับ (แรงเสียดทาน) กระทำต่อไม้ ดังนั้น CM ของไม้ จึงอยู่ในแนวแกน y ตลอดเวลา

และเนื่องจากพื้นลื่น ท่อนไม้ไม่มีการสูญเสียพลังงานกล ดังนั้น พลังงานกลจะคงตัว (แรงตั้งฉากของพื้นที่กระทำต่อไม้ อยู่ในแนวตั้งฉากกับพื้นและขยับตามปลาย A ทิศการเคลื่อนที่กับทิศของแรงตั้งฉากกันตลอดเวลา จึงไม่มีงานของแรงตั้งฉากของพื้น)

วิธีที่ 1

พิกัดของจุดศูนย์กลางมวลที่เวลาใด ๆ คือ $x_{CM} = 0$ และ $y_{CM} = \frac{L}{2}\cos\theta$

ดังนั้น อัตราเร็วของ CM , $\dot{y}_{CM} = -\frac{L}{2}(\sin\theta)\dot{\theta}$ (ก)

เมื่อเริ่มต้น ไม้มีพลังงานศักย์โดยไม่มีพลังงานจลน์ เนื่องจากพลังงานกลคงตัว ดังนั้น

พลังงานศักย์เริ่มต้น = พลังงานจลน์ในการเลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวล + พลังงานจลน์ของการหมุนรอบจุดศูนย์กลางมวล + พลังงานศักย์ที่มุม θ ใด ๆ

ให้พื้นเป็นระดับอ้างอิงพลังงานศักย์โน้มถ่วง จะได้

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}m\dot{y}_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega_{CM}^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta \qquad (ข)$$

เมื่อ ω_{CM} คืออัตราเร็วเชิงมุมรอบแกนที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุดศูนย์กลางมวล

จากรูป 23 จะเห็นว่า $\omega_{CM} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

แทน (ก) ลงใน (ข) จะได้

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{L^2}{4}\omega_{CM}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mL^2\right)\omega_{CM}^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta \qquad (ค)$$

อัตราเร็วเชิงมุม ω_{CM} ที่มุม θ ใด ๆ หาได้จากสมการ (ค)

เมื่อไม้ฟาดพื้นพอดี $\theta = 90^{\circ}$ ดังนั้น $\sin\theta = 1$ และ $\cos\theta = 0$

จากสมการ (ค) จะได้ว่า $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$

วิธีที่ 2

ขณะที่ไม้กำลังจะฟาดพื้น ปลาย A จะอยู่นิ่งเทียบกับพื้น จึงพิจารณาได้ว่าไม้หมุนรอบแกนตรึงที่ตั้งฉากกับกระดาษและผ่านปลาย A ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω_A ดังนั้น

พลังงานศักย์เริ่มต้น = พลังงานจลน์ของการหมุนรอบปลาย A + พลังงานศักย์ขณะฟาดพื้น

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega_A^2$$

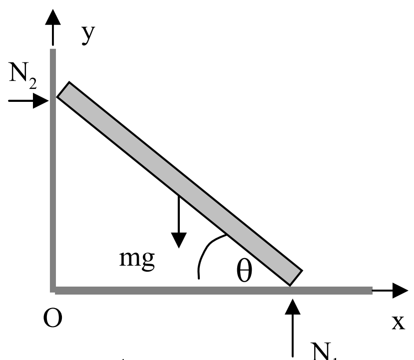
$$\omega_A = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

แต่อัตราเร็วเชิงมุมที่ไม้หมุนรอบแกนที่ผ่านปลาย A เท่ากับอัตราเร็วเชิงมุมที่ไม้หมุนรอบแกนที่ผ่าน CM ดังนั้น จะได้ว่า $\omega_{CM} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$

ตัวอย่างที่ 23 ท่อนไม้สม่ำเสมอยาว L มวล m ปลายด้านหนึ่งพิงผนังลื่น ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งอยู่บนพื้นลื่น ดังรูป 26 เมื่อเริ่มต้นจับท่อนไม้ให้อยู่นิ่งโดยเอียงทำมุม θ_0 กับพื้น เมื่อปล่อยให้ท่อนไม้เคลื่อนที่ ท่อนไม้นี้จะหลุดจากผนังหรือไม่ ถ้าหลุด จะหลุดเมื่อท่อนไม้เอียงทำมุมเท่าใดกับพื้น

<u>วิธีทำ</u>

ตั้งแกน x , y ดังรูป



รูป 26

พิกัดของจุดศูนย์กลางมวลของท่อนไม้ คือ

$$x_{CM} = \frac{L}{2}\cos\theta \qquad (ก)$$

$$y_{CM} = \frac{L}{2}\sin\theta \qquad (ข)$$

จากสมการ (ก) หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$\dot{x}_{CM} = -\frac{L}{2}(\sin\theta)\dot{\theta} \qquad (ค)$$

หาอนุพันธ์อีกครั้ง จะได้

$$\ddot{x}_{CM} = -\frac{L}{2}\left\{(\sin\theta)\ddot{\theta} + (\cos\theta)\dot{\theta}^2\right\}$$

แรงในแนวระดับที่กระทำต่อไม้ มีแรงที่ผนังทำต่อไม้ คือ N_2 ดังนั้น

$$N_2 = m\,\ddot{x}_{CM} = -m\frac{L}{2}\left\{(\sin\theta)\ddot{\theta} + (\cos\theta)\dot{\theta}^2\right\} \qquad (ง)$$

จากสมการ (ข) หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$\dot{y}_{CM} = \frac{L}{2}(\cos\theta)\dot{\theta} \qquad (จ)$$

เพราะว่า พลังงานจลน์ $E_k = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mL^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2$$

เนื่องจากกำแพงและพื้นลื่น ดังนั้น ในระหว่างไถลท่อนไม้ไม่มีการสูญเสียพลังงานกล จะได้ว่า พลังงานกลเริ่มต้น = พลังงานกลสุดท้าย

เลือกพื้นเป็นระดับอ้างอิงพลังงานศักย์โน้มถ่วง

$$mg\frac{L}{2}\sin\theta_0 = \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta) \qquad (ฉ)$$

หาอนุพันธ์สมการ (ฉ) เทียบกับเวลา จะได้

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{3g}{L}(\cos\theta)\dot{\theta}$$

หารตลอดด้วย $\dot{\theta}$

$$2\ddot{\theta} = -\frac{3g}{L}\cos\theta \qquad (ช)$$

ไม้จะหลุดจากผนัง เมื่อ $N_2 = 0$ ดังนั้น จากสมการ (ง) จะได้

$$(\sin\theta)\ddot{\theta} + (\cos\theta)\dot{\theta}^2 = 0$$

แทนค่า $\dot{\theta}^2$ และ $\ddot{\theta}$ จากสมการ (ฉ) และ (ช) ลงไป จะได้

$$\sin\theta = \frac{2}{3}\sin\theta_0$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right)$$

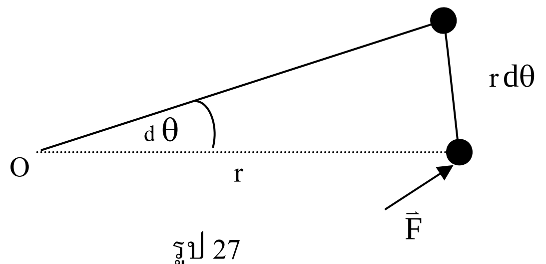
นั่นคือ ไม้จะหลุดจากผนัง โดยจะหลุดจากผนัง เมื่อ

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right) \qquad \text{ตอบ}$$

12 งานของทอร์กเมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง

เมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง ชิ้นส่วนแต่ละชิ้นของวัตถุจะเคลื่อนที่ในระนาบ เพื่อความสะดวกให้ระนาบนี้เป็นระนาบของกระดาษ

สมมติมีแรง $\vec{F}$ ซึ่งอยู่ในระนาบกระดาษกระทำต่อวัตถุ ถ้า r เป็นระยะจากจุด O ซึ่งอยู่นิ่ง (บนแกนหมุน) ไปยังวัตถุ เมื่อวัตถุขยับไปเล็กน้อย มุมที่ r กวาดไปจะเป็นมุมเล็กๆ $d\theta$ เรเดียน และระยะทางที่แรงเคลื่อนที่ (วัตถุเคลื่อนที่) เท่ากับ $r\,d\theta$ เมตร ดังรูป 27



รูป 27

ถ้าแยกแรง $\vec{F}$ เป็น 2 องค์ประกอบ คือ

$F_\perp$ คือ แรงในแนวที่ตั้งฉากกับ r

$F_{//}$ คือ แรงในแนวที่ขนานกับ r

งานน้อย ๆ dW ของแรง $\vec{F}$ เมื่อขยับเป็นระยะทางสั้นๆ $r\,d\theta$ เมตร หาได้จาก

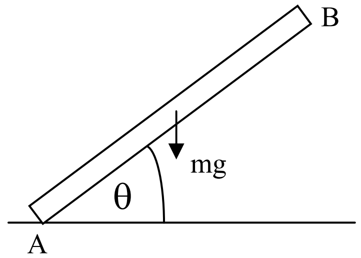
$$dW = F_\perp\, r\,d\theta \quad \text{จูล}$$

แต่ $F_\perp\, r$ คือ ทอร์ก τ ของแรง $\vec{F}$ คิดรอบจุด O

ดังนั้น
$$dW = \tau\, d\theta \qquad (24)$$

สมการ (24) บอกถึงงานย่อย ๆ เนื่องจากทอร์ก เมื่อวัตถุหมุนเล็กน้อย งานทั้งหมดเมื่อหมุนเป็นมุมใหญ่ๆได้จากการรวมงานย่อยๆเหล่านี้ ด้วยการอินทิเกรตนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 24 แท่งไม้สม่ำเสมอยาว L มีมวล m ปลายหนึ่งติดบานพับไว้กับพื้นที่จุด A ดังรูป 28 เมื่อเริ่มต้นไม้อยู่นิ่งโดยทำมุม 60° กับพื้น จากนั้นปล่อยให้ไม้เคลื่อนที่จนกระทั่งทันทีที่จะกระทบพื้น จงหา



รูป 28

ก) งานทั้งหมดที่แรงโน้มถ่วงกระทำต่อไม้

ข) พลังงานจลน์ของไม้ที่เปลี่ยนไป

ค) ความเร่งของปลาย B

<u>วิธีทำ</u>

ก)

วิธีที่ 1 ให้ θ เพิ่มขึ้น เมื่อไม้หมุนทวนเข็มนาฬิกา หรือก็คือ ให้ทิศของความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุม และทอร์ก มีค่าเป็นบวกเมื่อมีทิศพุ่งออกจากกระดาษ ดังนั้น จะได้ว่า

ทอร์กของแรงโน้มถ่วงคิดรอบจุด A

$$\tau_A = -mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

เนื่องจาก $dW = \tau d\theta$

ดังนั้น $dW = -mg\frac{L}{2}\cos\theta\, d\theta$ (ก)

ความหมายของ สมการ (ก) คือ เมื่อไม้หมุนแบบทวนเข็มไปเป็นมุมเล็ก ๆ $d\theta$ เรเดียน งานของแรงโน้มถ่วงที่ทำต่อไม้หาได้จากสมการ (ก)

ดังนั้น งานทั้งหมดของแรงโน้มถ่วงตั้งแต่เมื่อไม้ทำมุม 60° ถึง 0° หาได้จาก

$$W = \int_{\theta=\frac{\pi}{3}}^{0} -mg\frac{L}{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$= -mg\frac{L}{2}\left[\sin\theta\right]_{\theta=\frac{\pi}{3}}^{0}$$

$$= -mg\frac{L}{2}\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}mgL \quad \text{คำตอบข้อ ก}$$

วิธีที่ 2 แรงโน้มถ่วงที่กระทำต่อไม้ มีทิศพุ่งลงในแนวดิ่ง โดยคิดได้คล้ายกับว่ากระทำที่จุดศูนย์กลางมวลของไม้

ระยะทางตามแนวแรงที่แรงเคลื่อนที่มีค่าเป็น $\frac{L}{2}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}L$

ดังนั้น งานของแรงโน้มถ่วง $= \frac{\sqrt{3}}{4}mgL$ คำตอบข้อ ก

ข) จะหาพลังงานจลน์ที่เปลี่ยนไปโดยใช้วิธี 3 วิธี

วิธีที่ 1 จากหลักของงาน-พลังงานจลน์ คือ $W = \Delta E_k$

งานที่แรงโน้มถ่วงกระทำบนไม้ จะเท่ากับพลังงานจลน์ของไม้ที่เปลี่ยนไป

เมื่อเริ่มต้นไม้อยู่นิ่ง พลังงานจลน์เป็นศูนย์ และจากข้อ ก) งานที่แรงโน้มถ่วงทำต่อไม้มีค่าเป็น $\frac{\sqrt{3}}{4}\text{mgL}$ ดังนั้น

พลังงานจลน์แท่งไม้เพิ่มขึ้น $\frac{\sqrt{3}}{4}\text{mgL}$ คำตอบข้อ ข

วิธีที่ 2 แทนที่จะพิจารณาว่าแรงโน้มถ่วงทำงาน อาจพิจารณาว่าเป็นพลังงานศักย์โน้มถ่วงแทน ซึ่งจะได้ว่า

พลังงานกลเมื่อเริ่มต้น = พลังงานกลเมื่อสุดท้าย

$$E_{ki} + E_{pi} = E_{kf} + E_{pf}$$

ถ้าเลือกพื้นเป็นระดับอ้างอิงโน้มถ่วง จะได้

$$0 + mg\frac{L}{2}\sin 60^\circ = E_{kf} + 0$$

$$E_{kf} = \frac{\sqrt{3}}{4}\text{mgL}$$

คือ พลังงานจลน์เพิ่มขึ้น $\frac{\sqrt{3}}{4}\text{mgL}$ คำตอบข้อ ข

วิธีที่ 3 จะหาความเร่งเชิงมุม ความเร็วเชิงมุม แล้วจึงไปหาพลังงานจลน์

เนื่องจากจุด A ซึ่งติดบานพับนั้นอยู่นิ่ง ดังนั้น สมการ $\tau = I\alpha$ จึงใช้ได้กับแกนซึ่งตั้งฉากกับกระดาษและผ่านจุด A คือ

$$\tau_A = I_A\alpha_A$$

เนื่องจากเราให้ทิศพุ่งออกจากกระดาษเป็นบวก ดังนั้น จะได้ว่า

$$-mg\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{1}{12}mL^2\alpha_A$$

ดังนั้น $$\alpha_A = -\frac{6g\cos\theta}{L}$$

เพราะว่า $$\alpha_A = \frac{d\omega_A}{dt} = \frac{d\omega_A}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{d\omega_A}{d\theta}\right)\omega_A$$

หรือ $$\alpha_A\, d\theta = \omega_A\, d\omega_A$$

ดังนั้น $$-\frac{6g\cos\theta}{L}\, d\theta = \omega_A\, d\omega_A$$

อินทิเกรตตั้งแต่เริ่มต้น คือ $\theta = \frac{\pi}{3}$ โดย $\omega_A = 0$ จนถึงสุดท้าย คือ $\theta = 0$ โดย $\omega_A = \omega_A$ ใด ๆ จะได้

$$\int_{\theta=\frac{\pi}{3}}^{0} -\frac{6g\cos\theta}{L}\,d\theta = \int_{0}^{\omega_A} \omega_A\, d\omega_A$$

$$-\frac{6g}{L}\left[\sin\theta\right]_{\theta=\frac{\pi}{3}}^{0} = \left[\frac{\omega_A^{\ 2}}{2}\right]_{0}^{\omega_A}$$

$$\omega_A^{\ 2} = 6\sqrt{3}\,\frac{g}{L}$$

พลังงานจลน์ของท่อนไม้ $= \frac{1}{2} I_A \omega_A^{\ 2}$

พลังงานจลน์ของท่อนไม้ $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} mL^2\right)\left(6\sqrt{3}\,\frac{g}{L}\right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} mgL$$

เริ่มต้นพลังงานจลน์ท่อนไม้เป็นศูนย์

ดังนั้น พลังงานจลน์เพิ่มขึ้น $\frac{\sqrt{3}}{4} mgL$ คำตอบข้อ ข

ค) ความเร่งของปลาย B มี 2 ส่วนประกอบ คือ

ส่วนประกอบในแนวสัมผัสกับแนวการเคลื่อนที่ $a_t = \alpha_A L$

และ ส่วนประกอบในแนวเข้าสู่ศูนย์กลาง $a_C = \omega^2 L$

จากวิธีที่ 3 ข้อ ข) เมื่อไม้อยู่ในแนวระดับขนาดของความเร่งเชิงมุม $\alpha_A = \frac{6g}{L}$ และ $\omega^2 = 6\sqrt{3}\,\frac{g}{L}$ ดังนั้น

$$a_t = \frac{6g}{L} L = 6g$$

และ $a_c = 6\sqrt{3}\,\frac{g}{L} L = 6\sqrt{3}\,g$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_C)^2} = 12\,g$$ คำตอบข้อ ค

ภาคผนวก ก

ทฤษฎีแกนขนานและทฤษฎีแกนตั้งฉาก

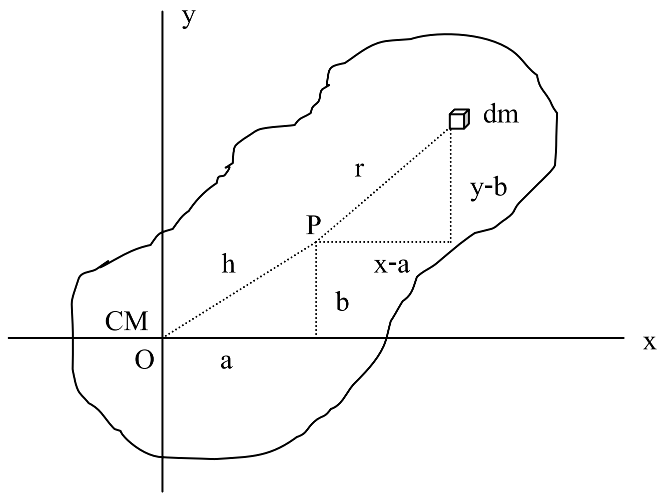
1) ทฤษฎีแกนขนาน (parallel-axis theorem)

วัตถุแข็งเกร็ง*รูปร่างอะไรก็ได้* มวล m มีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลเป็น I_{CM} จะได้ว่า โมเมนต์ความเฉื่อย I ของวัตถุนี้รอบแกนใด ๆ ซึ่งขนานกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลและอยู่ห่างกันเป็นระยะ h มีค่าเป็น

$$I = I_{CM} + mh^2 \qquad (ก\ 1)$$

สมการข้างบนนี้เรียกว่า ทฤษฎีแกนขนาน

--พิสูจน์ทฤษฎีแกนขนาน



รูป ก1

ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุซึ่งมีรูปร่างใด ๆ ตั้งแกน x , y และ z ให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุด O ดังรูป ก1 โดยแกน z พุ่งออกจากกระดาษ

ให้ I_{CM} เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล (แกน z)

I เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ขนานกับแกน z และผ่านจุด P โดยอยู่ห่างจากแกน z เป็นระยะ h ระยะตามแนวแกน x และ y ของจุด P เท่ากับ a และ b ตามลำดับ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุก้อนนี้รอบแกนซึ่งผ่านจุด P หาได้จาก

$$I = \int r^2 dm$$

$$= \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 \right] dm$$

โดยการอินทิเกรตเป็นการอินทิเกรตทั่วทั้งก้อนของวัตถุ

จัดพจน์ใหม่จะได้

$$I = \int (x^2 + y^2) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + \int (a^2 + b^2) dm \qquad (ก\ 2)$$

จากนิยามของจุดศูนย์กลางมวล $x_{CM} = \dfrac{\int x\,dm}{m}$

เนื่องจากเราตั้งแกนให้จุดกำเนิดทับจุดศูนย์กลางมวล แสดงว่า $x_{CM} = 0$

และจะได้ว่า $\int x\,dm = 0$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\int y\,dm = 0$

ดังนั้น จากสมการ (ก2) จึงเป็น

$$I = \int (x^2 + y^2)\,dm + \int (a^2 + b^2)\,dm$$

$$= I_{CM} + \left(a^2 + b^2\right)\int dm$$

$$= I_{CM} + (a^2+b^2)\,m$$

$$I = I_{CM} + mh^2 \qquad \text{(ก3)*}$$

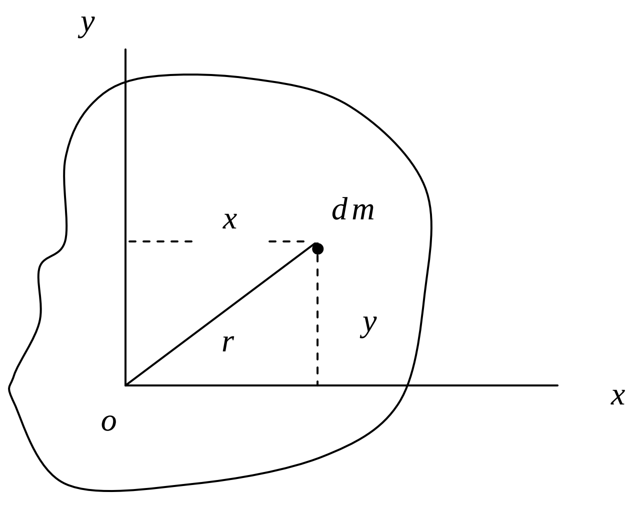
ตามที่ต้องการ

2)ทฤษฎีแกนตั้งฉาก (perpendicular axis theorem)

วัตถุแข็งเกร็งซึ่งมี<u>*รูปร่างแบนราบในระนาบ*</u> สำหรับพิกัดฉากชุดชุดใดๆซึ่งจุดกำเนิดอยู่ในระนาบของวัตถุ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบ จะเท่ากับผลบวกของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนทั้งสองที่เหลือที่อยู่ในระนาบของวัตถุ

--พิสูจน์ทฤษฎีแกนตั้งฉาก

ให้วัตถุอยู่ในระนาบ xy โดยแกน z พุ่งออกจากกระดาษ ดังรูป (ก2)



รูป ก 2

พิจารณาส่วนย่อยของวัตถุนี้ ซึ่งมีมวล dm กิโลกรัม อยู่ห่างจากแกน z,y และ x เป็นระยะทาง r,x และ y เมตร ตามลำดับ

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z ; โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z ; $I_z = \int r^2 dm$

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน x ; $I_x = \int y^2 dm$

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน y ; $I_y = \int x^2 dm$

แต่ $r^2 = x^2 + y^2$

ดังนั้น $I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2)\, dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_y + I_x$

คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบ จะเท่ากับผลบวกของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนทั้งสองที่เหลือที่อยู่ในระนาบของวัตถุ

ภาคผนวก ข
ความสัมพันธ์ระหว่างทอร์กกับโมเมนตัมเชิงมุม ในกรณีระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง

--- พื้นฐานสำหรับนักเรียนที่ไม่คุ้นเคยกับการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์

ในกรณีหาอนุพันธ์ของผลคูณของสเกลาร์ เรารู้ว่าเท่ากับ “หน้าดิฟหลังบวกหลังดิฟหน้า” ตัวอย่างเช่น

$$\frac{d}{dx}(x^3 x^2) = x^3 \frac{dx^2}{dx} + x^2 \frac{dx^3}{dx} = x^3(2x) + x^2(3x^2) = 5x^4$$

ซึ่งเท่ากับ $\frac{dx^5}{dx} = 5x^4$

ในกรณีหาอนุพันธ์ของ cross product ก็จะคล้ายกัน แต่ห้ามสลับอันดับ คือ

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right) \times \vec{B} + \vec{A} \times \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right) = \dot{\vec{A}} \times \vec{B} + \vec{A} \times \dot{\vec{B}}$$

การใส่จุดข้างบนเป็นการเขียนแบบย่อ หมายถึงการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จุดเดียวเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สองจุดเป็นอนุพันธ์อันดับสอง

ตัวอย่างเช่น $\frac{d}{dt}\left[(t^3\hat{i} + t^2\hat{j}) \times (t\hat{j} - t^2\hat{k})\right] =$

$$\left[\frac{d}{dt}(t^3\hat{i} + t^2\hat{j})\right] \times (t\hat{j} - t^2\hat{k}) + (t^3\hat{i} + t^2\hat{j}) \times \left[\frac{d}{dt}(t\hat{j} - t^2\hat{k})\right]$$

$$= (3t^2\hat{i} + 2t\hat{j}) \times (t\hat{j} - t^2\hat{k}) + (t^3\hat{i} + t^2\hat{j}) \times (\hat{j} - 2t\hat{k})$$

Cross ทีละพจน์คล้ายๆกับ (a+b) (c+d) = ac+ad+bc+bd จะได้

$$= 3t^3\hat{k} + 3t^4\hat{j} + 0 - 2t^3\hat{i} + t^3\hat{k} + 2t^4\hat{j} + 0 - 2t^3\hat{i}$$

$$= -4t^3\hat{i} + 5t^4\hat{j} + 4t^3\hat{k}$$

ซึ่งเท่ากับ $\dfrac{d}{dt}\left[(t^3\hat{i}+t^2\hat{j})\times(t\hat{j}-t^2\hat{k}\right] = \dfrac{d}{dt}\left[t^4\hat{k}+t^5\hat{j}+0-t^4\hat{i}\right]$

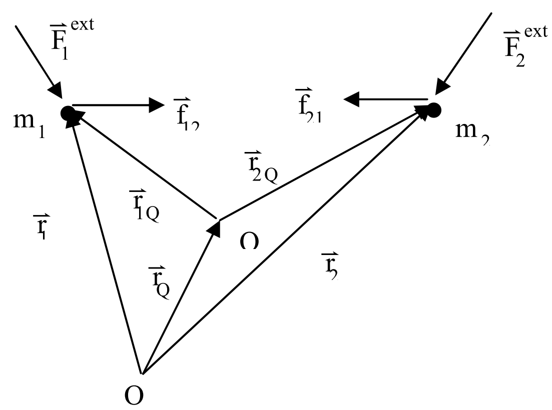
$= 4t^3\hat{k}+5t^4\hat{j}-4t^3\hat{i} = -4t^3\hat{i}+5t^4\hat{j}+4t^3\hat{k}$

--- ต่อไปเราจะหาความสัมพันธ์ระหว่างทอร์กกับโมเมนตัมเชิงมุม

(จาก Mechanics ของ K.R. Symon แต่ยกตัวอย่างโดยใช้ระบบอนุภาคที่ประกอบด้วยอนุภาคเพียง 2 ตัว เพื่อให้นักเรียนเข้าใจได้ง่าย)

เพื่อความชัดเจนจะใช้ระบบที่ประกอบด้วยอนุภาค 2 ตัว เป็นตัวอย่าง ซึ่งถ้าเข้าใจแล้วก็จะเข้าใจกรณีระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคมากกว่านี้

สมมติ มีอนุภาค 2 ตัว มวล m_1 และ m_2 ดังรูปที่ ข 1



รูปที่ ข 1

โดย	$\vec{F}_1^{ext}$	เป็นแรงภายนอกระบบที่กระทำต่อมวล m_1
	$\vec{F}_2^{ext}$	เป็นแรงภายนอกระบบที่กระทำต่อมวล m_2
	$\vec{f}_{12}$	เป็นแรงภายในระบบที่มวล m_2 กระทำต่อ m_1
	$\vec{f}_{21}$	เป็นแรงภายในระบบที่มวล m_1 กระทำต่อ m_2
	O	เป็นจุดที่อยู่นิ่ง
	Q	เป็นจุดใด ๆ ซึ่งไม่จำเป็นต้องอยู่นิ่ง
	$\vec{r}_Q$	เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด Q เทียบกับ O
	$\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$	เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวล m_1 และ m_2 ตามลำดับ เทียบกับ O
	$\vec{r}_{1Q}$ และ $\vec{r}_{2Q}$	เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวล m_1 และ m_2 ตามลำดับ เทียบกับ Q

เพราะว่า $\vec{r}_{1Q} = \vec{r}_1 - \vec{r}_Q$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้ $\dot{\vec{r}}_{1Q} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_Q$

และเพราะว่า $\vec{r}_{2Q} = \vec{r}_2 - \vec{r}_Q$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้ $\dot{\vec{r}}_{2Q} = \dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_Q$

โมเมนตัมเชิงมุมของมวล m_1 เทียบกับจุด Q หาได้จาก

$$\vec{L}_{1Q} = \vec{r}_{1Q} \times m_1 \dot{\vec{r}}_{1Q}$$
$$= m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_Q)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{1Q} = m_1(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_Q) \times (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_Q) + m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_Q)$$

พจน์แรกทางขวามือเป็นศูนย์เพราะ $(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_Q)$ ครอสกับตัวมันเอง ดังนั้น

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{1Q} = m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_Q)$$
$$= (\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times m_i \ddot{\vec{r}}_1 - m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q \qquad (ข\ 1)$$

แต่ $\ddot{\vec{r}}_1$ คือ ความเร่งของมวล m_1 เทียบกับจุด O ซึ่งเป็นจุดที่อยู่นิ่ง จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สอง จะได้ว่า $m_1\ddot{\vec{r}}_1$ คือแรงทั้งหมดที่กระทำต่อมวล m_1 ดังนั้น

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{f}_{12} + \vec{F}_1^{ext} \qquad (ข1a)$$

แทนในสมการ (ข 1) จะได้

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{1Q} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times \vec{f}_{12} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_1^{ext} - m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q \qquad (ข\ 2)$$

พึงสังเกตว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุมทางซ้ายมือนั้นสังเกตจากผู้สังเกตบนกรอบอ้างอิงเฉื่อย มิเช่นนั้นสมการ (ข1a) จะไม่เป็นจริง

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณามวล m_2 จะได้

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{2Q} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_Q) \times \vec{f}_{21} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_2^{ext} - m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q \qquad (ข\ 3)$$

นำสมการ (ข 2) บวกกับ (ข 3) จะได้

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{1Q} + \frac{d}{dt}\vec{L}_{2Q} = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times \vec{f}_{12} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_Q) \times \vec{f}_{21}]$$
$$+[(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_1^{ext} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_2^{ext}]$$
$$-[m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q] \qquad (ข\ 4)$$

พิจารณาวงเล็บแรกทางขวามือ ซึ่งเป็นผลบวกของทอร์กรอบจุด Q ของแรง $\vec{f}_{12}$ และ $\vec{f}_{21}$

เพราะว่า $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ เพราะเป็นแรงคู่กิริยา-ปฏิกิริยา นอกจากนี้ยังอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้น ผลบวกของทอร์กรอบจุดใด ๆ ของแรง $\vec{f}_{12}$ และ $\vec{f}_{21}$ จึงมีค่าเป็นศูนย์ทั้งสิ้น วงเล็บแรกทางขวามือจึงเป็นศูนย์

พิจารณาวงเล็บที่สองทางขวามือ ซึ่งคือผลบวกของทอร์กของแรงภายนอกระบบ รอบจุด Q

ถ้าเรานิยาม $\vec{\tau}_Q$ ว่า คือทอร์กรอบจุด Q ที่กระทำต่อระบบ ซึ่งเป็นผลรวมของทอร์กรอบจุด Q ของแรงภายนอกระบบที่กระทำต่อสมาชิกแต่ละตัว ดังนั้น

$$\vec{\tau}_Q = (\vec{r}_1 - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_1^{ext} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_2^{ext}$$

สมการ (ข 4) จะเป็น

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{1Q} + \frac{d}{dt}\vec{L}_{2Q} = \vec{\tau}_Q - [m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q] \quad \text{(ข 5)}$$

พิจารณาวงเล็บสุดท้ายในสมการ (ข 5) จะได้ว่า

$$m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q$$

$$= m_1\vec{r}_1\times\ddot{\vec{r}}_Q - m_1\vec{r}_Q\times\ddot{\vec{r}}_Q + m_2\vec{r}_2\times\ddot{\vec{r}}_Q - m_2\vec{r}_Q\times\ddot{\vec{r}}_Q$$

$$= (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)\times\ddot{\vec{r}}_Q - (m_1 + m_2)\vec{r}_Q\times\ddot{\vec{r}}_Q \quad \text{(ข 6)}$$

จากนิยามของศูนย์กลางมวล

$$M\vec{R}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

เมื่อ $M = m_1 + m_2$

ดังนั้นทางขวามือของสมการ (ข 6) จะเป็น

$$M\vec{R}_{CM}\times\ddot{\vec{r}}_Q - M\vec{r}_Q\times\ddot{\vec{r}}_Q = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q \quad \text{(ข 7)}$$

แทนสมการ (ข 7) ลงในสมการ (ข 5)

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{1Q} + \frac{d}{dt}\vec{L}_{2Q} = \vec{\tau}_Q - M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_{1Q} + \vec{L}_{2Q}) = \vec{\tau}_Q - M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q \quad \text{(ข 8)}$$

ถ้าเรานิยาม $\vec{L}_Q$ ว่า คือโมเมนตัมเชิงมุมของระบบรอบจุด Q ซึ่งเป็นผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด Q ของสมาชิกแต่ละตัว คือ

$$\vec{L}_Q = \vec{L}_{1Q} + \vec{L}_{2Q}$$

ดังนั้น สมการ (ข 8) จะเป็น

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_Q = \vec{\tau}_Q - M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q \quad \text{(ข 9)*}$$

สมการ (ข9) นี้ เป็นสมการที่สังเกตโดยผู้สังเกตบนกรอบอ้างอิงเฉื่อย

--ในการประยุกต์ใช้นั้นมีกรณีที่สำคัญ 3 กรณีคือ

1) กรณีที่จุด Q ไม่มีความเร่ง

2) กรณีที่จุด Q เป็นจุดศูนย์กลางมวล

3) กรณีที่จุด Q มีความเร่งพุ่งเข้าหรือพุ่งออกผ่านศูนย์กลางมวล

โดย

1) ถ้าจุด Q ไม่มีความเร่งจะได้ $\ddot{\vec{r}}_Q = 0$

2) ถ้าจุด Q เป็นจุดศูนย์กลางมวล จะได้ $\vec{R}_{CM} - \vec{r}_Q = 0$

3) ถ้า Q มีความเร่งพุ่งเข้าหรือพุ่งออกผ่านศูนย์กลางมวล จะได้ $\ddot{\vec{r}}_Q$ อยู่ในแนวเดียวกับ $\vec{R}_{CM} - \vec{r}_Q$

ซึ่งทั้งสามกรณี สมการ (ข 9) จะเหลือเป็น

$$\vec{\tau}_Q = \frac{d}{dt}\vec{L}_Q$$

เพื่อความสะดวกเราจะเขียนเป็น

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}\vec{L} \qquad (ข\ 10)*$$

คือ ทอร์กของแรงภายนอกระบบ เท่ากับ อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุมของระบบ(สังเกตจากผู้สังเกตบนกรอบอ้างอิงเฉื่อย) โดยทั้งทอร์กและโมเมนตัมเชิงมุมต้องคิดรอบจุดเดียวกัน และจะต้องเป็นจุดที่ไม่มีความเร่ง หรือถ้ามีความเร่งก็ต้องเป็นจุดศูนย์กลางมวลของระบบ หรือถ้าไม่ใช่จุดศูนย์ กลางมวลของระบบก็ต้องมีความเร่งพุ่งเข้าหรือพุ่งออกผ่านศูนย์กลางมวล สมการ (ข 10) จึงจะเป็นจริง

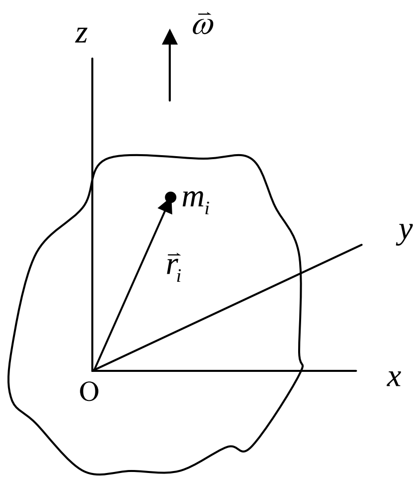
ในที่นี้เราใช้ระบบที่ประกอบด้วยอนุภาค 2 ตัวเป็นตัวอย่างในการพิจารณา แต่สมการ (ข 10) เป็นจริงเสมอไม่ว่าระบบจะมีอนุภาคกี่ตัว รวมถึงในกรณีของวัตถุแข็งเกร็งด้วย

ภาคผนวก ค

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งสังเกตโดยผู้สังเกตที่ติดไปกับวัตถุ

เราจะคำนวณหาโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งสังเกตโดยผู้สังเกตที่ติดไปกับวัตถุ <u>*โดยการหมุนของวัตถุเป็นการหมุนและกลิ้งในระนาบ*</u>

สมมติมีวัตถุแข็งเกร็งกำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ และเป็นการหมุนและกลิ้งในระนาบ ซึ่งทิศของความเร็วเชิงมุมชี้แนวเดิม เราสร้างพิกัดฉาก xyz ที่ติดไปกับวัตถุ โดยให้แกน z อยู่ในแนวของความเร็วเชิงมุม ดังรูป ค1



รูป ค1

พิจารณาว่าวัตถุแข็งเกร็งนี้ประกอบด้วยมวลชิ้นเล็กๆเรียงอัดกัน ให้ m_i เป็นมวลของชิ้นที่ i ส่วน $\vec{r}_i$ และ $\vec{v}_i$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งและความเร็วของมวล m_i เทียบกับจุด O ซึ่งติดไปกับวัตถุ

ความเร็วของมวลชิ้นที่ i สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่ที่จุด O หาได้จากสมการ (10) คือ

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i = \omega\hat{k}\times(x_i\hat{i}+y_i\hat{j}+z_i\hat{k}) \qquad \text{(ค1)}$$

$$= -y_i\omega\,\hat{i}+x_i\omega\,\hat{j}$$

โมเมนตัมเชิงเส้นของมวลชิ้นที่ i สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่จุด O จึงเป็น

$$\vec{P}_i = m_i(-y_i\omega\hat{i}+x_i\omega\,\hat{j}) \qquad \text{(ค2)}$$

โมเมนตัมเชิงมุมของมวลชิ้นที่ i สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่ที่จุด O คือ

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i\times\vec{P}_i = (x_i\,\hat{i}+y_i\,\hat{j}+z_i\,\hat{k})\times m_i(-y_i\omega\hat{i}+x_i\omega\hat{j})$$

$$= -m_ix_iz_i\,\omega\hat{i} - m_iy_iz_i\,\omega\,\hat{j} + m_i\omega(x_i^2+y_i^2)\,\hat{k} \qquad \text{(ค3)}$$

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุทั้งก้อน หาได้จากการรวมโมเมนตัมเชิงมุมของชิ้นเล็กๆทุกชิ้น เนื่องจากมวลชิ้นเล็กๆเหล่านี้เรียงอัดกันอย่างต่อเนื่อง การรวมจึงรวมด้วยการอินทิเกรต เป็น

$$\vec{L} = \int -xz\omega dm\,\hat{i} + \int -yz\omega\,dm\,\hat{j} + \int(x^2+y^2)\,\omega\,dm\,\hat{k} \qquad \text{(ค4)}$$

โดยเราแทนมวลชิ้นเล็กๆ m_i ในสมการ (ค3) ด้วย dm และแทนพิกัด x_i, y_i, z_i ของมวลชิ้นเล็กๆด้วย x, y, z

เราจะมาดูว่าตัวไหนบ้างในเครื่องหมายอินทิเกรตของสมการ (ค4) ที่เป็นค่าคงที่ วิธีการคือดูว่าเราอินทิเกรตเทียบกับอะไร ก็คือเราอินทิเกรตเทียบกับมวลเล็กๆ dm ดังนั้น ถ้าเปลี่ยนมวลเล็กๆนี้ตัวไหนไม่เปลี่ยนตัวนั้นก็เป็นค่าคงที่ ดึงออกนอกเครื่องหมายอินทิเกรตได้ จะเห็นว่าเมื่อเราเปลี่ยนชิ้นของมวลเล็กๆ ตำแหน่ง x, y, z เปลี่ยนแต่ ω ไม่เปลี่ยนเพราะมวลเล็กๆทุกก้อนมีความเร็วเชิงมุมเดียวกัน นอกจากนี้ $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ ก็ไม่เปลี่ยนเพราะผู้สังเกตที่ติดไปกับวัตถุเห็นเวกเตอร์หน่วยเหล่านี้คงที่ทั้งขนาดและทิศทาง ดังนั้น $\omega,\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ เป็นค่าคงที่ดึงออกนอกเครื่องหมายอินทิเกรตได้ เป็น

$$\vec{L} = \hat{i}\,\omega\int -xz\,dm + \hat{j}\,\omega\int -yz\,dm + \hat{k}\omega\int(x^2+y^2)\,dm \qquad \text{(ค5)}$$

ให้ $I_{xz} = \int -xzdm$

$I_{yz} = \int -yzdm$

ส่วนพจน์ $\int(x^2+y^2)dm$ เรารู้ว่ามันคือโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z เขียนสั้นๆเป็น I_z เมื่อเขียนโมเมนตัมเชิงมุมในองค์ประกอบของพิกัดฉากนี้ สมการ (ค5) จึงเขียนได้เป็น

$$L_x\hat{i}+L_y\hat{j}+L_z\hat{k} = I_{xz}\omega\hat{i}+I_{yz}\omega\,\hat{j}+I_z\omega\hat{k} \qquad \text{(ค6)*}$$

พึงสังเกตว่าแม้ความเร็วเชิงมุมมีแต่ในแนวแกน z แต่โมเมนตัมเชิงมุมมีทุกแนวแกน ยกเว้นว่ามวลมีการกระจายตามแกน x และ z ที่เหมาะสมทำให้ I_{xz} เป็นศูนย์ ก็จะไม่มีองค์ประกอบของโมเมนตัมเชิงมุมในแนวแกน x หรือถ้ามวลมีการกระจายตามแกน y และ z ที่เหมาะสมทำให้ I_{yz} เป็นศูนย์ ก็จะไม่มีองค์ประกอบของโมเมนตัมเชิงมุมในแนวแกน y

ภาคผนวก ง

การหมุนด้วยความเร่งเชิงมุมคงตัวในกรณีการหมุนและกลิ้งในระนาบ

การหมุนและการกลิ้งในระนาบด้วยความเร่งเชิงมุมคงตัวจะมีความคล้ายกับการเคลื่อนที่ในแนวตรงด้วยความเร่งคงตัว ซึ่งสามารถหาสูตรเพื่อใช้ในคำนวณหาความเร็วเชิงมุมและมุมที่เกิดจากการหมุน ได้ดังต่อไปนี้

จาก $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

หรือเขียนได้เป็น $d\omega = \alpha\, dt$

อินทิเกรตสมการแบบไม่จำกัดเขต คือ

$$\int d\omega = \int \alpha\, dt \qquad (ง1)$$

เมื่อ α คงตัว จะได้ว่า

$$\omega = \alpha t + C_1 \qquad (ง2)$$

ถ้าเมื่อเริ่มต้น ความเร็วเชิงมุมเป็น ω_0 จากสมการ (ง2) จะได้

$C_1 = \omega_0$ แทนลงในสมการ (ง2) จะได้ความเร็วเชิงมุมที่เวลาใด ๆ คือ

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (ง3)^*$$

แต่ $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ จึงทำให้เขียนสมการ (ง3) ได้เป็น

$$d\theta = (\omega_0 + \alpha t)\, dt \qquad (ง4)$$

อินทิเกรตสมการ (ง4) แบบไม่จำกัดเขต จะได้

$$\int d\theta = \int (\omega_0 + \alpha t)\, dt$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 + C_2 \qquad (ง5)$$

ถ้าเมื่อเริ่มต้น $\theta = 0$ จะได้ว่า $C_2 = 0$ และสมการ (ง5) จะเป็น

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (ง6)^*$$

สมการ (ง6) บอกถึงมุมเนื่องจากการหมุน ที่เวลาใด ๆ ในพจน์ของความเร็วเชิงมุมเริ่มต้น ความเร่งเชิงมุม และเวลา

สมการ (ง6) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\theta = t(\omega_0 + \frac{1}{2}\alpha t)$$

$$= t\left(\frac{\omega_0}{2} + \frac{1}{2}(\omega_0 + \alpha t)\right)$$

แทนค่า $\omega = \omega_0 + \alpha t$ จากสมการ (ง3) ลงไปจะได้

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t \qquad (ง7)*$$

สมการ (ง7) บอกถึงมุมเนื่องจากการหมุน ที่เวลาใด ๆ ในพจน์ของความเร็วเชิงมุมเริ่มต้น ความเร็วเชิงมุมสุดท้าย และเวลา

จากสมการ (ง3) ; $t = \dfrac{\omega - \omega_0}{\alpha}$ แทนในสมการ (ง7) จะได้ว่า

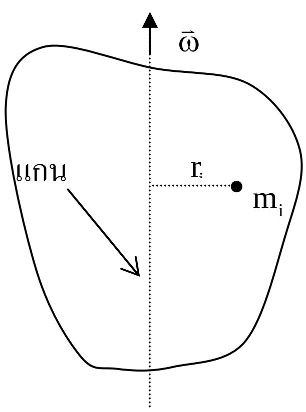
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \qquad (ง8)*$$

จะเห็นว่า สมการ (ง3) (ง6) (ง7) และ (ง8) มีความคล้ายกับสมการในกรณีการเคลื่อนที่แนวตรงด้วยความเร่งคงตัว

ภาคผนวก จ

พลังงานจลน์ในการหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง

1) พลังงานจลน์ในการหมุนรอบแกนตรึง



รูป จ1

เพื่อความสะดวก จะพิจารณาวัตถุแข็งเกร็งเป็นระบบอนุภาค

สมมติวัตถุแข็งเกร็งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ รอบ แกนหมุนตรึง (แกนหมุนที่ไม่ได้เคลื่อนที่) ดังรูป จ1

โดย m_i เป็นมวลชิ้นหนึ่ง (ชิ้นที่ i) ของวัตถุ

r_i เป็นระยะตั้งฉากจากมวล m_i ไปยังแกนหมุน

อัตราเร็วของมวล m_i คือ $v_i = r_i\omega$

ดังนั้น พลังงานจลน์ของมวล $m_i = \frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$

และพลังงานจลน์ของวัตถุทั้งก้อนเนื่องจากการหมุน

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (จ1)*$$

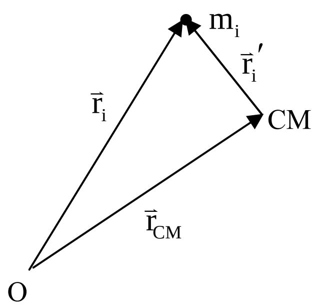
เมื่อ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุน

สมการ จ1 บอกถึงพลังงานจลน์ในการหมุนรอบแกนตรึง

2) พลังงานจลน์ในการหมุนรอบแกนไม่ตรึง

เพื่อความสะดวกจะพิจารณาวัตถุแข็งเกร็งเป็นระบบอนุภาค

พิจารณามวลตัวที่ i ซึ่งมีมวล m_i ดังรูป จ2 ให้ O เป็นจุดตรึง



รูป จ2

$\vec{r}_i$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวล m_i เทียบกับจุด O

$\vec{r}_{CM}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบเทียบกับจุด O

$\vec{r}_i'$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวล m_i เทียบกับ CM

เพราะว่า พลังงานจลน์ของระบบอนุภาค นิยามด้วยผลรวมของพลังงานจลน์ของสมาชิกในระบบ ดังนั้น

$$\text{พลังงานจลน์ของระบบ } E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right) \qquad (\text{จ}2)$$

จากรูป จ2 $\quad \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i'$ หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_{CM} + \dot{\vec{r}}_i'$$

หรือ $\quad \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i' \qquad$ (จ3)

เมื่อ $\vec{v}_{CM}$ คือความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลเทียบกับจุด O

$\vec{v}_i'$ คือความเร็วของมวล m_i เทียบกับจุดศูนย์กลางมวล

หาผลคูณเชิงสเกลาร์ของสมการ (จ3) จะได้ว่า

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')$$

$$= \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i'$$

แต่ $\quad \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i'$

ดังนั้น $\quad \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i'$

$$v_i^2 = v_{CM}^2 + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + v_i'^2 \qquad (\text{จ}4)$$

แทนสมการ (จ4) ลงใน (จ2) จะได้

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$$

$$= \frac{1}{2} (\sum_i m_i) v_{CM}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$$

$$= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \vec{v}_{CM} \cdot (\sum_i m_i \vec{v}_i') + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 \qquad (\text{จ}5)$$

แต่ $\sum_i m_i \vec{v}_i'$ คือ โมเมนตัมของระบบเทียบกับจุดศูนย์กลางมวล ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$E_k = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 \qquad (\text{จ}6)^*$$

พิจารณาสมการ (จ6) จะเห็นว่า พลังงานจลน์ของระบบประกอบด้วย 2 ส่วน

ส่วนแรก เป็นพลังงานจลน์ของการเลื่อนที่ โดยคิดคล้ายกับว่ามวลทั้งหมดของระบบไปอัดอยู่ที่ศูนย์กลางมวล

ส่วนที่สอง เป็นพลังงานจลน์ของสมาชิกเทียบกับจุดศูนย์กลางมวล

อนึ่ง สมการ (จ6) เป็นจริงเสมอ ไม่ว่าสมาชิกแต่ละตัวจะเคลื่อนที่อย่างไร คือ อาจเคลื่อนที่เป็นแนวตรง แนวโค้ง หมุน หรือสั่น ก็ได้

ในกรณีวัตถุแข็งเกร็ง เนื่องจากระยะห่างระหว่างสมาชิกคงที่ การเคลื่อนที่ของสมาชิกเทียบกับจุดศูนย์กลางมวลจึงเป็นการหมุนรอบจุดศูนย์กลางมวล จากสมการ (จ1) จะได้ว่าพลังงานจลน์ของการหมุนรอบแกนหมุนที่ผ่านศูนย์กลางมวลเท่ากับ $\frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2$ ดังนั้น สมการ (จ6) จะเป็น

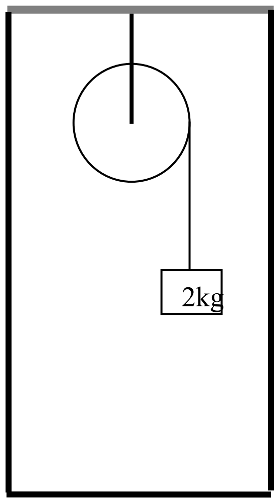
$$E_k = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2 \qquad (\text{จ}7)^*$$

นั่นคือ เมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนไม่ตรึง พลังงานจลน์หาได้จากผลรวมของพลังงานจลน์เนื่องจากการเลื่อนที่โดยคิดว่ามวลทั้งหมดไปรวมอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล กับพลังงานจลน์เนื่องจากการหมุนรอบแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

แบบฝึกหัด

1) มวล 2 กิโลกรัม ผูกด้วยเชือกเบาซึ่งพันรอบรอกมวล 1 กิโลกรัม รัศมี 0.1 เมตร โดยรอกยึดติดกับเพดานลิฟท์ด้วยก้านรอก ดังรูป 29 ถ้าลิฟท์เคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่ง 1 เมตร/วินาที^{2} จงหา

ก) แรงตึงเชือก ข) ความเร่งเทียบกับลิฟท์ของมวล 2 กิโลกรัม ค) แรงที่ก้านรอกดึงเพดานลิฟท์



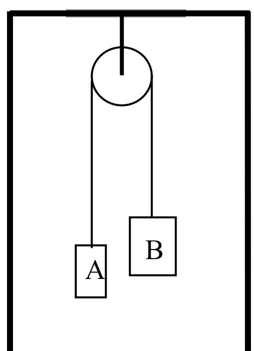
รูป 29

2) จงทำโจทย์ข้อ 1 ถ้าลิฟท์เคลื่อนที่ลงด้วยความเร่ง 1 เมตร/วินาที^{2}

3) กล่อง A และกล่อง B มวล 5 และ 10 กิโลกรัม ตามลำดับ ผูกด้วยเชือกเบาคล้องผ่านรอกหมุนได้คล่องซึ่งมีรัศมี 0.1 เมตร มวล 2 กิโลกรัม รอกยึดติดกับเพดานลิฟท์ด้วยก้านรอก ดังรูป 30 โดยเชือกไม่มีการไถลไปบนผิวรอก ถ้าลิฟท์เคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่ง 2 เมตร/วินาที^{2} จงหา

ก) แรงตึงเชือกที่ดึงกล่อง A ข) แรงตึงเชือกที่ดึงกล่อง B

ค) ความเร่งของมวลทั้งสองเทียบกับลิฟท์ ง) แรงที่ก้านรอกดึงเพดานลิฟท์



รูป 30

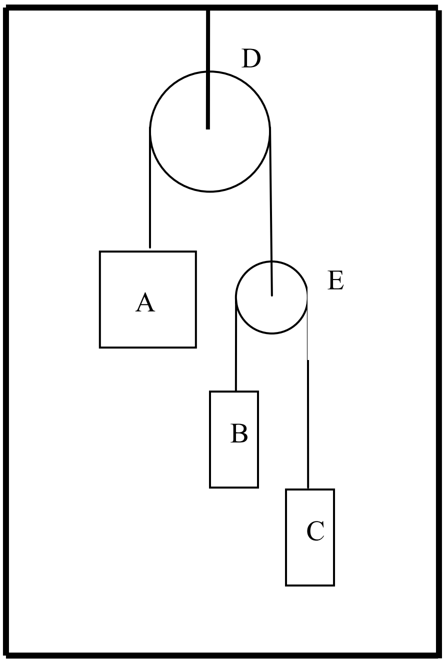
4) จงทำโจทย์ข้อ 3 ถ้าลิฟท์เคลื่อนที่ลงด้วยความเร่ง 2 เมตร/วินาที^{2}

5) กล่อง A , B และ C มวล 6 , 4 และ 2 กิโลกรัม ตามลำดับ ผูกด้วยเชือกเบาคล้องผ่านรอก D และ E ซึ่งหมุนได้คล่อง รอก D ยึดติดกับเพดานลิฟท์ด้วยก้านรอก ดังรูป 31 โดยเชือกทุกเส้นไม่มีการไถลไปบนผิวรอก รอก D มีมวล 2 กิโลกรัม รัศมี 0.1 เมตร รอก E มีมวล 1 กิโลกรัม รัศมี 0.05 เมตร ถ้าลิฟท์เคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร็วคงตัว จงหา

ก) แรงตึงเชือกที่ดึงกล่อง A ข) แรงตึงเชือกที่ดึงรอก E ค) แรงตึงเชือกที่ดึงกล่อง B

ง) แรงตึงเชือกที่ดึงกล่อง C จ) ความเร่งของมวล A ,B,C และรอก E เทียบกับลิฟท์

ฉ) แรงที่ก้านรอก D ดึงเพดานลิฟท์



รูป 31

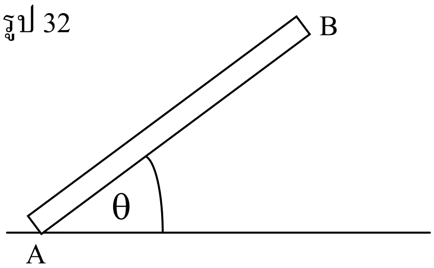
6) จงทำโจทย์ข้อ 5 ถ้าลิฟท์เคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่ง 2 เมตร/วินาที^{2}

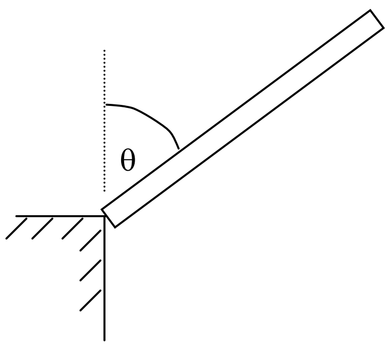
7) จงทำโจทย์ข้อ 5 ถ้าลิฟท์เคลื่อนที่ลงด้วยความเร่ง 2 เมตร/วินาที^{2}

8) แท่งไม้สม่ำเสมอยาว 2 เมตร มีมวล 4 กิโลกรัม ปลาย A ติดบานพับไว้กับพื้นทำให้แท่งไม้เคลื่อนที่ในระนาบของกระดาษ ดังรูป 32 เมื่อเริ่มต้นไม้อยู่นิ่งโดยทำมุม 60° กับพื้น จากนั้นปล่อยให้ไม้เคลื่อนที่ จงหาความเร่งของปลาย B เมื่อ

ก) เริ่มต้น ข) $\theta = 45^o$ ค) ใกล้จะฟาดพื้น

รูป 32





รูป 33

9) ในข้อ 8 จงหาแรงที่บานพับกระทำต่อปลาย A เมื่อ

ก) เริ่มต้น ข) $\theta = 45^o$ ค) ใกล้จะฟาดพื้น

10) แท่งไม้สม่ำเสมอยาว L มีมวล m ปลายหนึ่งวางอยู่ที่ขอบโต๊ะซึ่งมีผิวหยาบ(ปลายไม้ไม่ไถล) แท่งไม้ถูกปล่อยจากการอยู่นิ่งในลักษณะเกือบจะอยู่ในแนวดิ่ง

ก) ในขณะที่แท่งไม้ทำมุม θ กับแนวดิ่ง ดังรูป 33 จงหาความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล ในแนวเข้าหาขอบโต๊ะ และจงหาความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลในแนวตั้งฉากกับแท่งไม้

ข) ในขณะที่แท่งไม้ทำมุม θ กับแนวดิ่ง จงหาแรงที่ขอบโต๊ะกระทำต่อแท่งไม้

ค) จงหามุม θ เมื่อแท่งไม้เริ่มหลุดจากโต๊ะ

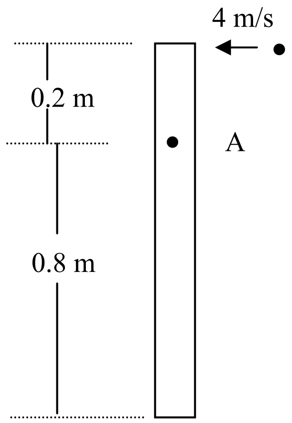
11) ท่อนไม้สม่ำเสมอยาว 1 เมตร มวล 5 กิโลกรัม หมุนได้คล่องรอบจุด A ขว้างดินน้ำมันมวล 0.5 กิโลกรัม ด้วยความเร็ว 4 เมตร/วินาที ดังรูป 34 ทำให้ดินน้ำมันติดกับปลายบนของท่อนไม้ จงหา

ก) ความเร็วเชิงมุมของท่อนไม้ ทันทีหลังดินน้ำมันชนติด

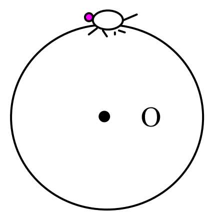
ข) มุม θ ซึ่งท่อนไม้ทำกับแนวดิ่ง มากที่สุดที่ท่อนไม้กวาดไปได้

ค) พลังงานกลของระบบที่ประกอบด้วยท่อนไม้และดินน้ำมัน ก่อนชนและหลังชน เปลี่ยนแปลงไปกี่จูล

ง) โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบ ก่อนชนและหลังชน เท่าเดิมหรือไม่ เพราะเหตุใด



รูป 34



รูป 35

12) จานกลมสม่ำเสมอมวล 1 กิโลกรัม รัศมี 0.1 เมตร หมุนได้คล่องรอบแกนซึ่งตั้งฉากกับจานและผ่านจุดศูนย์กลางมวล O ของจาน หนูตัวหนึ่งมวล 0.05 กิโลกรัม เกาะอยู่ที่ขอบจาน ดังรูป 35 เดิมทั้งหนูและจานอยู่นิ่ง จากนั้นหนูวิ่งไปตามขอบจานด้วยอัตราเร็ว 1.1 เมตร/วินาที สัมพัทธ์กับจาน

ก) จงวิเคราะห์แรงต่างๆที่เกี่ยวข้อง และจงให้เหตุผลว่า แรงเหล่านี้มีผลต่อองค์ประกอบในแนวแกนหมุนของโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด O หรือไม่ เพราะเหตุใด

ข) จงหาความเร็วเชิงมุมของจาน

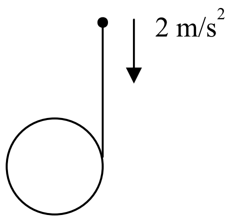
ค) พลังงานกลของระบบ (หนู+จาน) ก่อนหนูวิ่งและหลังหนูวิ่ง เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

13) แท่งโลหะทรงกระบอกมวล 1 กิโลกรัม รัศมี 0.1 เมตร มีเชือกพันรอบผิวนอก เมื่อเริ่มต้นทรงกระบอกอยู่นิ่ง สูงจากพื้น 5 เมตร ใช้มือจับปลายเชือกหย่อนลงด้วยความเร่ง 2 เมตร/วินาที ^{2} ดังรูป 36 ทำให้ระนาบของการหมุนคงตัวตลอดการเคลื่อนที่ เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที

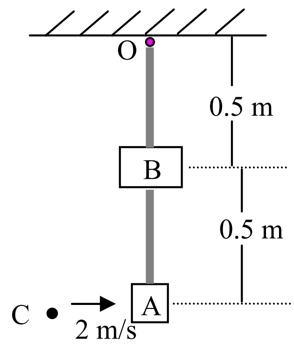
ก) ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกเป็นกี่เมตร/วินาที

ข) ทรงกระบอกอยู่สูงจากพื้นกี่เมตร

ค) พลังงานกลของทรงกระบอกเปลี่ยนไปจากเดิมกี่จูล ง) มือออกแรงดึงเชือกกี่นิวตัน



รูป 36



รูป 37

14) คานเบายาว 1 เมตร มีกล่อง A และ B มวล 0.9 และ 4 กิโลกรัม ตามลำดับติดที่ปลาย และกึ่งกลางคานตามลำดับ อีกปลายหนึ่งของคานติดบานพับซึ่งหมุนได้คล่องทำให้คานแกว่งได้คล่องในระนาบของกระดาษ เดิมคานอยู่ในแนวดิ่ง ดินน้ำมัน C มวล 0.1 กิโลกรัม มีความเร็ว 2 เมตร/วินาที ในแนวระดับวิ่งเข้าชนและติดกับกล่อง A ดังรูป 37

ก)จงหาความเร็วของกล่อง A และ B ทันทีหลังชน

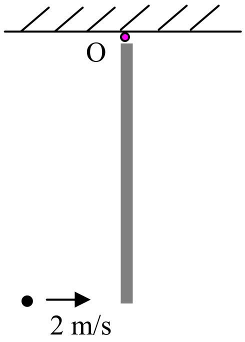
ข)โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบที่ประกอบด้วย ดินน้ำมัน C กล่อง A กล่อง B และคาน ก่อนชนและทันทีหลังชน คงที่หรือไม่ เพราะเหตุใด

ค) จงหามุม θ ซึ่งคานทำกับแนวดิ่ง มากที่สุดที่คานกวาดไปได้

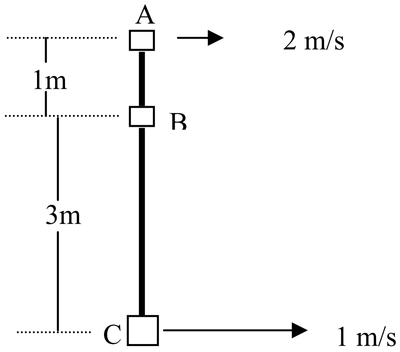
15) คานสม่ำเสมอยาว 1 เมตร มวล 2 กิโลกรัม ปลายหนึ่งของคานติดบานพับซึ่งหมุนได้คล่องที่จุด O เดิมคานอยู่ในแนวดิ่ง ดินน้ำมัน C มวล 0.5 กิโลกรัม มีความเร็ว 2 เมตร/วินาที ในแนวระดับวิ่งเข้าชนและติดกับปลายคาน ดังรูป 38 ทันทีหลังชน จงหา

ก) ความเร็วของปลายคาน ข) โมเมนตัมเชิงเส้นของดินน้ำมัน

ค) โมเมนตัมเชิงเส้นของคาน ง) โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบก่อนชนกับหลังชนต่างกันเท่าใด



รูป 38



รูป 39

16) ในข้อ 15 หลังจากที่ดินน้ำมันชนติดกับคานแล้ว คานแกว่งทำมุมกับแนวดิ่งมากสุดกี่องศา

17) กล่อง A , B และ C มวล 2 , 3 และ 4 กิโลกรัม ตามลำดับ ติดกับคานสม่ำเสมอยาว 4 เมตร มวล 5 กิโลกรัม รวมกันเป็นวัตถุแข็งเกร็งอันหนึ่ง ณ เวลาหนึ่งพบว่าคานอยู่ในแนวดิ่ง โดยกล่อง A และกล่อง C มีความเร็ว 2 และ 8 เมตร/วินาที ตามลำดับ ทิศไปทางขวามือ ดังรูป 39 จงหา

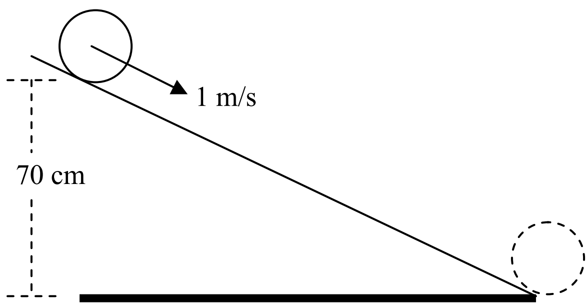
ก) ตำแหน่งของ CM

ข) ความเร็วเชิงมุมที่วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนที่ตั้งฉากกับกระดาษ และผ่าน CM

ค) ความเร็วของ CM

ง) พลังงานจลน์ของวัตถุแข็งเกร็ง

18) ทรงกลมตันมวล M รัศมี R กลิ้งลงมาตรงๆตามพื้นเอียงโดยไม่มีการลื่นไถล พบว่าที่ความสูง 70 เซนติเมตรจากพื้นอัตราเร็วของจุดศูนย์กลางมวลตามแนวพื้นเอียงเป็น 1 เมตร/วินาที ดังรูป 40 ณ จุดฐานของพื้นเอียงอัตราเร็วของจุดศูนย์กลางมวลเป็นกี่เมตร/วินาที



รูป 40

19) ในข้อ 18 ถ้าเปลี่ยนจากทรงกลมเป็นทรงกระบอกตัน ณ จุดฐานของพื้นเอียงอัตราเร็วของจุดศูนย์กลางมวลเป็นกี่เมตร/วินาที