เรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอน 4

คณิตศาสตร์กับฟิสิกส์

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล 22 พฤษภาคม 2556

เมื่อเดือนกรกฎาคมปีที่แล้ว (2555) มีข่าวใหญ่ที่สร้างความตื่นเต้นให้แก่นักฟิสิกส์ทั่วโลก คือจากผลการทดลองนักวิทยาศาสตร์ของเซิร์นเชื่อว่าพวกเขาค้นพบอนุภาคฮิกส์ ซึ่งอนุภาคฮิกส์นี้เมื่อประมาณ50 ปีก่อน มีนักวิทยาศาสตร์หลายคนเป็นผู้เสนอในทางทฤษฎีว่ามีอนุภาคนี้ และชื่อของผู้เสนอที่เราคุ้นเคยที่สุดคือปีเตอร์ ฮิกส์ แต่ในการทดลองนั้นหาอนุภาคนี้ยากมากเพราะมันสลายตัวแทบจะทันทีที่มันก่อกำเนิดขึ้นมา

ข่าวนี้มันทำให้ผมย้อนรำลึกถึงความหลังตามประสาของผู้สูงอายุ เมื่อครั้งยังเรียนปริญญาโท ในช่วงนั้นผมมีปัญหาที่สงสัยมากอย่างหนึ่งคือ ทำไมคณิตศาสตร์ที่ดูเหมือนว่าเป็นเรื่องนามธรรมนั้น กลับใช้ได้กับวิชาฟิสิกส์ซึ่งเป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับเรื่องจริง ซึ่งเมื่อไล่เรียงลำดับความสงสัยไปเรื่อยๆ ก็พบว่าตนเองสงสัยนิยามของคณิตศาสตร์ ตำราคณิตศาสตร์ทุกเล่มที่เคยอ่านก็ไม่มีเล่มใดที่บอกว่า ทำไมจึงต้องนิยามเช่นนั้น

ในช่วงนั้นผมพยายามเล็งๆอาจารย์ที่คาดว่าจะตอบคำถามนี้ได้ อาจารย์ที่ได้เล็งไว้คือท่านอาจารย์อนันตสิน เตชะกำพุช เมื่อสบโอกาสก็ถามท่านเกี่ยวกับนิยามของคณิตศาสตร์ทันที ท่านตอบสั้นๆว่า “ก็มันใช้ได้”

คำตอบนี้ผมจำได้แม่นมาก จำได้แม้กระทั่งว่าตอนจะถามนั้นผมเดินตามท่านข้ามสะพานหน้าตึกฟิสิกส์เมื่อข้ามสะพานถึงตึกแล้วจึงถาม ท่านหยุดเดินตอบผม ตอบเสร็จก็เดินต่อ ปล่อยให้ผมยืนงงเพราะฟังแล้วไม่เข้าใจ ยังนึกในใจว่าอาจารย์ตอบอะไรก็ไม่รู้ ไม่เห็นจะรู้เรื่องเลย

มา ณ วันนี้ ถ้ามีลูกศิษย์ถามผม ถ้าผมจะตอบแบบรีบๆก็คงตอบว่า “ก็มันใช้ได้” นี่แหละ อย่างไรก็ตาม ยังไม่มีโอกาสตอบลูกศิษย์เลยแม้แต่คนเดียว เพราะไม่มีลูกศิษย์คนใดถามเรื่องนี้เลย

หลังจากที่ถามท่านอาจารย์อนันตสินนานเท่าใดจำไม่ได้ ก็รู้สึกว่าตนเองเริ่มมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับฟิสิกส์ คือมองเห็นว่า “*<u>บางด้านของบางสิ่ง มีสมบัติ(หรือประพฤติตัว)ตามคณิตศาสตร์นั้นๆ เมื่อเรานิยามการกระทำที่เหมาะสมกับมัน ทำให้เราสามารถใช้ประโยชน์คณิตศาสตร์นั้นๆได้</u>*” ผมให้ความสำคัญของความสัมพันธ์นี้มาก และได้เขียนไว้บทที่ 1 ของหนังสือ “กลศาสตร์” (ประมาณปี 2547) ชื่อของบทที่ 1 นี้คือ“คณิตศาสตร์กับฟิสิกส์ ” หนังสือเล่มนี้เป็นหนังสือที่คนไม่ค่อยอ่าน* ผมจึงขอยกมาทั้งดุ้นให้ผู้อ่านได้ลองอ่านดู ดังนี้

---

*เมื่อครั้งที่เขียนหนังสือเล่มนี้มีสิ่งที่ผมไม่เข้าใจหรือเข้าใจคลาดเคลื่อนสองอย่าง อย่างแรกคือ inverse ของการบวกเวกเตอร์นั้นไม่เป็นจริงทางฟิสิกส์ หรือก็คือการแตกเวกเตอร์ออกเป็นองค์ประกอบจะมีความหมายทางฟิสิกส์ก็ต่อเมื่อเราแตกให้อยู่ในองค์ประกอบที่ตั้งฉากกัน ผมจะกล่าวถึงเรื่องนี้อีกทีในเรื่องเล่าตอนต่อๆไป อย่างที่สองคือเมื่อทรงกลมหรือทรงกระบอกกลิ้งโดยไม่ไถล เราใช้สมการ $^{2} = I\sim$ กับจุดที่แตะพื้นได้เพราะมันอยู่นิ่ง(ชั่วขณะ) ซึ่งไม่จริงดังได้กล่าวแล้วในเรื่องเล่า 3

บทที่ 1
คณิตศาสตร์กับฟิสิกส์

นักฟิสิกส์นั้นใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือหรือเป็นภาษา ผู้เรียนฟิสิกส์จำนวนมากเข้าใจว่าตนไม่เข้าใจวิชาฟิสิกส์ แต่ที่จริงแล้วกลับเป็นไม่เข้าใจคณิตศาสตร์ คือไม่สามารถมองความเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับฟิสิกส์ วิชากลศาสตร์ในระดับพื้นฐานที่จะกล่าวถึงในหนังสือเล่มนี้ใช้เวกเตอร์เป็นเครื่องมือสำคัญ สำหรับผู้เริ่มต้นศึกษามักมีความสงสัยเกี่ยวกับเวกเตอร์ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะไม่ได้ใช้ในชีวิตประจำวันจึงดูเป็นของแปลก ขณะที่คณิตศาสตร์ของจำนวนนับนั้นคนมักไม่สงสัยเพราะใช้จนชินในชีวิตประจำวัน ดังนั้นจึงเป็นการเหมาะสมที่จะพิจารณาเรื่องที่คุ้นเคยกันดีคือจำนวนนับ เพื่อเป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจเวกเตอร์ต่อไป

จำนวนนับ

สมมติว่าเราเป็นมนุษย์ต่างดาวย้ายถิ่นฐานจากต่างดาวมายังโลก ในการที่จะอยู่อย่างสะดวกบนโลกก็ต้องคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมขึ้นมาใช้ จากการที่อยู่บนโลกพบว่ามี ก้อนหิน ผลส้ม กระต่าย ต้นมะพร้าว ฯลฯ ซึ่งพบว่าเป็นการเหมาะสมที่จะแทนจำนวนสิ่งเหล่านี้ด้วยจำนวนนับ (คือ 1 2 3 ...) เพราะสามารถใช้จำนวนนับบอกได้ว่ามีก้อนหินกี่ก้อน มีส้มกี่ผล มีกระต่ายกี่ตัว มีมะพร้าวกี่ต้น ฯลฯ และเพื่อที่จะใช้จำนวนนับให้มีประโยชน์มากขึ้นจึงต้องหาข้อตกลงเกี่ยวกับจำนวนนับ อย่างแรกที่เห็นชัด ๆ คือการรวมกันของจำนวน มีเหตุการณ์หลายอย่างที่แสดงถึงการรวมกันของจำนวน ตัวอย่างเช่นมีก้อนหินอยู่ 1 ก้อนนำมาเพิ่มอีก 1 ก้อน หรือมีกระต่ายอยู่ 1 ตัว นำมาเพิ่มอีก 1 ตัว เป็นต้น
ดังนั้นจึงเป็นการดีที่จะตกลง (นิยาม) การกระทำของจำนวนนับที่เรียกว่าการบวกโดยใช้สัญลักษณ์ว่า “+”

คำถามก็คือจะตกลงว่าอย่างไรระหว่าง

$$1+1 = 2 \qquad (1.1)$$

$$1+1 = 4 \qquad (1.2)$$

หรืออื่น ๆ

เหตุการณ์ที่สอดคล้องกับสมการ (1.2) คือ 1+1 = 4 นั้น เช่น กระต่ายตัวผู้และตัวเมียอยู่ด้วยกัน ต่อมากระต่ายตัวเมียออกลูกมา 2 ตัว จึงมีกระต่ายทั้งหมด 4 ตัว* แต่เหตุการณ์ที่สอดคล้องกับสมการ (1.2) นี้มีน้อยมาก จึงไม่มีประโยชน์ที่จะตั้งข้อตกลงนี้ขึ้นมา ในขณะที่มีเหตุการณ์มากมายที่สอดคล้องกับสมการ (1.1) ตัวอย่างเช่น เดิมมีก้อนหิน 1 ก้อน ต่อมานำมาเพิ่มอีก 1 ก้อน รวมมีก้อนหินทั้งหมด 2 ก้อน เป็นต้น เราจึงตกลงกัน (นิยาม) ว่าการบวกจำนวนนับจะต้องเป็นไปตามสมการ (1.1)

---

* ปกติแล้วการนิยามการบวกจะรู้ผลทันที ไม่ใช่ต้องรอเวลาหลายวันเพื่อให้ได้ลูกกระต่ายมาเพิ่ม ซึ่งในที่นี้ไม่ได้สนใจเวลา

ในทำนองเดียวกันก็นิยามการกระทำ ลบ คูณ หาร ขึ้นมาเพื่อใช้ประโยชน์ ซึ่งจะไม่กล่าวในรายละเอียด

คำถามต่อไปนี้ แม้จะเป็นคำถามง่าย ๆ แต่เป็นประโยชน์ในการมองความเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับเหตุการณ์จริงบนโลก

คำถามที่ 1.1 เริ่มต้นมีกรงเปล่าที่ไม่มีไก่ ถ้าเอาไก่ใส่ในกรง 2 ตัว แล้วเอามาใส่อีก 3 ตัว ถามว่ามีไก่ในกรงกี่ตัว และจงพิจารณาขั้นตอนของคำตอบที่ได้

คำตอบ มีไก่ในกรง 5 ตัว

ถ้าพิจารณาขั้นตอนในการหาจำนวนตัวไก่ จะเป็นดังนี้

1) จากประสบการณ์จำนวนตัวไก่ประพฤติตัวตามคณิตศาสตร์ของจำนวนนับ เราจึงแทนจำนวนตัวไก่ด้วยจำนวนนับ หรือบางครั้งอาจกล่าวว่าจำนวนตัวไก่เป็นจำนวนนับ

2) การเอาไก่ใส่ในกรง 2 ตัว แล้วเอามาใส่อีก 3 ตัว สอดคล้องกับการกระทำที่เรียกว่า การบวกในคณิตศาสตร์ของจำนวนนับ

โดยในคณิตศาสตร์ของจำนวนนับนั้น 2+3 = 5

แปลผลว่ามีไก่อยู่ในกรง 5 ตัว

คำถามที่ 1.2 รู้ได้อย่างไรว่าจำนวนตัวไก่ประพฤติตัวตามคณิตศาสตร์ของจำนวนนับ

คำตอบ รู้ได้จากการทดลอง (หรือจากประสบการณ์) ลองเอาไก่ใส่ในกรง 2 ตัว แล้วเอามาใส่อีก 3 ตัว นับดูไก่ในกรงจะเห็นว่ามีไก่อยู่ 5 ตัว

คือสอดคล้องกับคณิตศาสตร์ของจำนวนนับที่ว่า 2 + 3 = 5

หรือถ้าเดิมมีไก่อยู่ 5 ตัว เอาออกไป 4 ตัว นับดูไก่ในกรงจะเห็นว่าเหลือไก่ 1 ตัว

คือสอดคล้องกับคณิตศาสตร์ของจำนวนนับที่ว่า 5 - 4 = 1

ตัวอย่างที่กล่าวแล้วนี้คือกรณีบวกและลบ ในกรณีคูณ และหาร ก็เป็นเช่นเดียวกัน

คำถามที่ 1.3 มีกรงเปล่าอยู่กรงหนึ่ง ใส่ไก่ลงไป 2 ตัว จากนั้นใส่ลงไปอีก 3 ตัว ผลลัพธ์คือไก่ 5 ตัวเสมอไปหรือไม่

คำตอบ ไม่เสมอไป ถ้าเป็นสถานการณ์ปกติจะมีไก่ 5 ตัว

แต่ถ้าอุณหภูมิของกรงเป็น 1000 องศาเซลเซียส คำตอบนี้จะไม่สอดคล้องกับความเป็นจริง

เพราะถ้าอุณหภูมิของกรงเป็น 1000 องศาเซลเซียส สิ่งที่อยู่ในกรงไม่ใช่ไก่ 5 ตัว แต่เป็นน้ำเละ ๆ หรืออาจเป็นไอไปหมด คือไม่มีไก่แม้แต่ตัวเดียว

จะเห็นว่าผู้ใช้คณิตศาสตร์ต้องวินิจฉัยเองว่า คณิตศาสตร์ที่ใช้เหมาะสมกับเหตุการณ์จริงหรือไม่

สำหรับคณิตศาสตร์ที่ง่าย ๆ ดังเช่น จำนวนนับ อาจใช้การหยั่งรู้ด้วยการไตร่ตรองพิจารณาความเหมาะสมกับเหตุการณ์จริงบนโลก แต่ในกรณีที่คณิตศาสตร์ที่ใช้เป็นนามธรรมจนเกินกว่าที่จะใช้การหยั่งรู้

ตรวจสอบ ต้องตรวจสอบด้วยการทดลอง ตัวอย่างเช่น การใช้ตัวดำเนินการ (operators) แทนตัวแปรพลวัต (dynamical variables) ในวิชากลศาสตร์ควอนตัม คงเป็นการยากที่จะหยั่งรู้ด้วยการไตร่ตรอง แต่จากการทดลองชี้ว่าการใช้ตัวดำเนินการแทนตัวแปรพลวัตนั้นเหมาะสม

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าไม่ว่าทฤษฎีจะทำนายว่าอย่างไร สุดท้ายแล้วการทดลองจะเป็นสิ่งที่จะตัดสินว่าทฤษฎีนั้นน่าเชื่อถือหรือไม่

คำถามที่ 1.4 สมมติว่ามีเครื่องจักรเครื่องหนึ่งซึ่งผลิตไวน์และน้ำเชื่อมจากน้ำอ้อย ถ้าใช้น้ำอ้อย 100 ลิตร ได้ไวน์ 10 ลิตร ถามว่าได้น้ำเชื่อมกี่ลิตร

คำตอบ จะใช้คณิตศาสตร์ทำนายดู คือ

ได้น้ำเชื่อม = $100 - 10 = 90$ ลิตร

ในสมการข้างบนใช้คณิตศาสตร์เป็นตัวเชื่อมโยงปริมาณของไวน์ น้ำเชื่อมและน้ำอ้อย คำตอบนี้ถูกหรือไม่ ขึ้นอยู่กับว่าน้ำอ้อยที่ใส่เข้าไปนั้นเปลี่ยนไปเป็นไวน์กับน้ำเชื่อมเท่านั้น หรือเป็นอย่างอื่นอีก ถ้าเป็นอย่างอื่นอีกเช่นเป็นน้ำส้มด้วย คำตอบนี้ก็ผิด

เราจะย้อนมาดูคำถามที่ 1.4 นี้อีกเมื่อกล่าวถึงหลักของงาน-พลังงานจลน์ ในบทที่ 5

คำถามที่ 1.5 ในระบบจำนวนนับ ทำไมการกระทำพื้นฐานจึงต้องเป็นบวก ลบ คูณ และหาร เป็นอย่างอื่นอีกได้หรือไม่

คำตอบ ลองไตร่ตรองดูจะเห็นว่าเพียงแค่การกระทำพื้นฐาน บวก ลบ คูณ และหาร ก็เพียงพอในการนำไปใช้ประโยชน์แล้ว ไม่มีความจำเป็นที่จะนิยามการกระทำอื่นขึ้นมาอีก

ตัวอย่างเช่นสมมติว่ามีตัวดำเนินการ $\oplus$ ซึ่งเมื่ออยู่ระหว่างเลขใดแล้วให้ผลลัพธ์เท่ากับผลคูณของเลขสองจำนวนกับค่า sin ของมุมของผลคูณของเลขทั้งสอง (ให้หน่วยของมุมเป็นเรเดียน) เช่น

$2 \oplus 5 = 10\sin 10$

$3 \oplus 9 = 27\sin 27$ เป็นต้น

ถามว่าจะเอาตัวดำเนินการนี้ไปใช้ประโยชน์ได้อย่างไร จะเห็นว่าไม่รู้จะเอาไปใช้ประโยชน์อย่างไร หรือถ้ามีประโยชน์ก็น้อยมากจนไม่จำเป็นต้องนิยามการกระทำนี้ขึ้นมา

สรุป

คณิตศาสตร์ที่ถูกนำมาใช้ในเชิงประยุกต์จะต้องมีหลายสิ่งหลายอย่างบนโลกซึ่งประพฤติตัวตามกติกาของคณิตศาสตร์ จึงจะนำมาใช้ประโยชน์ในเชิงประยุกต์ได้ ตัวอย่างเช่น จำนวนตัวไก่ จำนวนก้อนหิน จำนวนผลส้ม ฯลฯ ต่างก็ประพฤติตัวตามคณิตศาสตร์ของจำนวนนับเราจึงใช้ประโยชน์คณิตศาสตร์ของจำนวนนับได้

คณิตศาสตร์แต่ละอย่างไม่สามารถสอดคล้องครอบคลุมทุกเหตุการณ์บนโลก ผู้ใช้คณิตศาสตร์ต้องไตร่ตรองเองว่าคณิตศาสตร์ที่ใช้เหมาะสมกับเหตุการณ์ที่สนใจหรือไม่ ในกรณีที่เป็นคณิตศาสตร์ซึ่งลึกซึ้ง

เกินกว่าจะหยั่งรู้ได้ด้วยการไตร่ตรอง การทดลองจะเป็นตัวชี้ว่าคณิตศาสตร์เรื่องนั้นใช้ได้กับเหตุการณ์ที่สนใจหรือไม่

คำถามท้ายบท

1) ลำน้ำหนึ่งลำ ไหลมารวมกับลำน้ำอีกหนึ่งลำ กลายเป็นลำน้ำหนึ่งลำซึ่งลำใหญ่กว่าก่อนรวมกัน การรวมกันของจำนวนลำน้ำนี้ประพฤติตัวตามกฎการบวกของจำนวนนับหรือไม่ จงให้เหตุผล
2) สถานที่แห่งหนึ่งมีไก่อยู่สองตัว ต่อมาสถานที่แห่งนั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร็วแสง สถานที่แห่งนั้นยังมีไก่อยู่สองตัวหรือไม่ ซึ่งก็คือคณิตศาสตร์ของจำนวนนับยังใช้ได้อยู่หรือไม่ จงให้เหตุผล
3) สมมติ นายแดงเป็นทั้งนักฟิสิกส์และนักคณิตศาสตร์ระดับแนวหน้าของโลก เขาตั้งทฤษฎีโดยใช้คณิตศาสตร์ระดับลึกซึ้งซึ่งคนธรรมดาไม่เข้าใจ ในทฤษฎีทำนายว่าถ้าคนเรามีความเร็วเท่ากับความเร็วแสงแล้วจะเป็นหนุ่มเป็นสาวตลอดไป ไม่มีวันแก่เฒ่า
ก) แม้นายแดงมีความสามารถในการหยั่งรู้เหนือคนธรรมดา ท่านคิดว่านายแดงหยั่งรู้ได้หรือไม่ ว่าคณิตศาสตร์ที่เขาใช้ยังมีความสอดคล้องกับเหตุการณ์
ข) ควรมีการทดลองเพื่อยืนยันทฤษฎีหรือไม่

จบบทที่ 1 ของหนังสือกลศาสตร์

ย้อนมาที่อนุภาคฮิกส์ ผมไม่รู้ทฤษฎีของฮิกส์ว่าเป็นอย่างไร รู้แต่ว่าเขาต้องใช้คณิตศาสตร์ ซึ่งมันมีโอกาสที่ผลการทำนายทางทฤษฎีนี้ตกอยู่ในวังวนของคณิตศาสตร์โดยอาจจะไม่สอดคล้องกับเหตุการณ์จริงก็เป็นได้ ตัวฮิกส์เองนั้นแน่นอนว่ามีความสามารถในการหยั่งรู้เหนือคนธรรมดา แต่คิดว่าเขาก็คงไม่กล้าฟันธงว่ามีอนุภาคฮิกส์แน่ๆ คนอื่นๆก็เช่นกัน ดังนั้นจึงต้องมีการทดลองยืนยัน

ถ้าจะกล่าวอีกอย่างก็อาจกล่าวได้ว่า “คณิตศาสตร์นั้นไม่มีผิด แต่ที่มีผิดเป็นเพราะผู้ใช้ ใช้ไม่เหมาะสมเอง”

ทิ้งท้ายสำหรับเรื่องเล่า 4 เมื่อใดก็ตามที่ท่านมองเห็นว่า “*บางด้านของบางสิ่ง มีสมบัติ(หรือประพฤติตัว)ตามคณิตศาสตร์นั้นๆ* ” แสดงว่าท่านเริ่มมีความเข้าใจกับคณิตศาสตร์ (ที่ใช้ในเชิงประยุกต์) นั้นๆ แล้ว