เรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอน 5

เวกเตอร์ต้องประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล 25 พฤษภาคม 2556

คณิตศาสตร์ที่ใช้มากในฟิสิกส์ระดับพื้นฐาน (เช่นมัธยมปลายสายวิทยาศาสตร์ รวมทั้งปี 1 ของมหาวิทยาลัย) มี 2 อย่าง อย่างแรกคือเวกเตอร์ อย่างที่สองคือแคลคูลัส ตัวผมเองนั้นก็ได้คลุกคลีกับคณิตศาสตร์ทั้งสองนี้พอสมควร แต่เป็นการคลุกคลีในลักษณะของผู้ใช้คณิตศาสตร์เชิงประยุกต์ (คือใช้กับฟิสิกส์) การมองคณิตศาสตร์ของผมจึงไม่ได้มองว่าคณิตศาสตร์เป็นตัวฝึกสมองให้คิดแบบมีเหตุมีผล แต่มองคณิตศาสตร์ในลักษณะที่เป็นเครื่องมือของฟิสิกส์

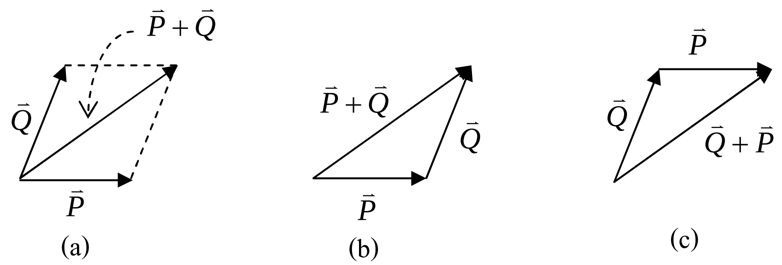
จากเรื่องเล่าตอน 4 ได้กล่าวมาแล้วว่าความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับฟิสิกส์ คือ "*บางด้านของบางสิ่ง มีสมบัติ(หรือประพฤติตัว)ตามคณิตศาสตร์นั้นๆ เมื่อเรานิยามการกระทำที่เหมาะสมกับมัน ทำให้เราสามารถใช้ประโยชน์คณิตศาสตร์นั้นๆได้*"

ในตอนนี้เราจะว่ากันถึงเรื่องของเวกเตอร์ โดยจะพูดถึงสิ่งที่ผู้ใช้เวกเตอร์ควรรู้ (แต่หนังสือทั่วไปมักมองข้าม) คือความสำคัญของการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน

--ช่วงแรกนี้จะให้ดูว่าเวกเตอร์นอกจากมีขนาดและทิศทางแล้วยังต้องประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ในโลกเรานี้มีปริมาณหลายอย่างที่มีทั้งขนาดและทิศทาง(*หรือสามารถกำหนดทิศทางให้เป็นที่เข้าใจตรงกันได้*) เราสามารถแทนปริมาณเหล่านี้ด้วยลูกศร โดยความยาวของลูกศรบอกถึงขนาดของปริมาณนั้นส่วนทิศทางของลูกศรบอกทิศทางของปริมาณนั้น และ(บางด้านของ)ปริมาณเหล่านี้*ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน* ดังรูปที่1a ปริมาณเหล่านี้มีสมบัติของเวกเตอร์ โดยเรามักกล่าวสั้นๆว่าปริมาณเหล่านี้เป็นปริมาณเวกเตอร์ หรือสั้นกว่านี้คือปริมาณเหล่านี้เป็นเวกเตอร์

การบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนานบางครั้งเรียกว่าการบวกแบบหางต่อหัว การบวกต้องมีสมบัติของการสลับที่กันของการบวก (commutative) ดังรูปที่ 1b และ 1c พึงระลึกว่าต้องเป็นเวกเตอร์ของปริมาณชนิดเดียวกันจึงบวกกันได้

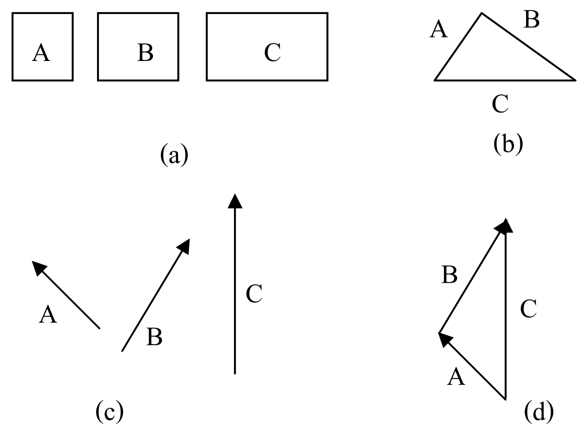


รูปที่1a. การบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน b.การบวกแบบหางต่อหัว $\vec{P}+\vec{Q}$
c.การบวกแบบหางต่อหัว $\vec{Q}+\vec{P}$

ตัวอย่างเช่นแรง แรงมีทั้งขนาดและทิศทาง แรงมีสมบัติหลายด้านเช่นด้านที่ส่งผลต่อการเคลื่อนที่ ด้านที่ทำให้เจ็บ ฯลฯ ปกติแล้วเรามักสนใจแรงในด้านที่ส่งผลต่อการเคลื่อนที่ทั้งแบบเลื่อนที่และการเคลื่อนที่แบบหมุนโดยวัตถุไม่มีการเปลี่ยนรูปร่าง จากการทดลองเรารู้ว่ามันประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน เราจึงกล่าวว่าแรงเป็นเวกเตอร์ อย่างไรก็ตามในการออกแรงตีเด็กด้วยแรงสองแรง ความเจ็บของเด็กย่อมไม่เป็นไปตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือสมบัติด้านนี้ของแรงไม่ใช่เวกเตอร์

พื้นที่เป็นตัวอย่างที่ผมคิดว่าดีในการทำความเข้าใจกับเวกเตอร์ (หมายถึงพื้นที่ในระนาบ ในกรณีที่พื้นที่ผิวโค้งเราจะพิจารณา differential ของพื้นที่แทน คือพิจารณาพื้นที่เล็กๆจนมองได้ว่าพื้นที่เล็กๆเหล่านี้แต่ละอันอยู่ในระนาบของตนเอง) พื้นที่นั้นไม่มีทิศทางที่เห็นชัดเจน เพียงแต่เราสามารถกำหนดทิศให้เป็นที่เข้าใจตรงกันได้ เรามักใช้พื้นที่ในการคำนวณฟลักซ์ของเวกเตอร์ที่เข้าหรือออกพื้นที่นั้นด้วยการนิยามฟลักซ์ที่เข้าหรือออกจากพื้นที่ในระนาบด้วย scalar product ระหว่างเวกเตอร์กับพื้นที่นั้น ในกรณีนี้เราพิจารณาได้ว่าพื้นที่เป็นเวกเตอร์ การที่พื้นที่ประพฤติตัวเป็นเวกเตอร์อาจเข้าใจได้โดยสมมติมีแผ่น A , B และ C 3 แผ่นซึ่งมีความกว้างเท่ากันดังรูปที่ 2a การกำหนดให้ความกว้างเท่ากันนี้เพื่อความสะดวกเท่านั้น คือทำให้พื้นที่แต่ละแผ่นแปรผันตรงตามความยาว ซึ่งแม้ความกว้างต่างกันผลลัพธ์ยังคงเป็นเช่นเดิม ถ้านำแผ่นทั้งสามมาต่อให้ปลายชนกันเมื่อมองจากด้านข้างเป็นดังรูปที่ 2b จินตนาการว่าแผ่นทั้งสามอยู่ท่ามกลางลำอนุภาคชนิดหนึ่งที่สามารถทะลุแผ่นเหล่านี้ได้ จะเห็นว่าไม่ว่าลำอนุภาคจะอยู่ในทิศทางใดจำนวนอนุภาคที่เข้าหรือออก(เทียบได้กับ ฟลักซ์) จากแผ่น A รวมกับจำนวนอนุภาคที่เข้าหรือออกจากแผ่น B จะเท่ากับจำนวนอนุภาคที่เข้าหรือออกจากแผ่น C เสมอ หรือ C = (A+B) จากนั้นเขียนลูกศร A, B และ C ให้ขนาดเท่ากับขนาดพื้นที่ของ A, B และ C โดยใช้มาตราส่วนที่เหมาะสม และ*กำหนดทิศของลูกศรให้ตั้งฉากกับผิว*ของแผ่น A , B และ C ดังรูป 2c นำลูกศรมาเรียงกันโดยไม่ให้ทิศทางเปลี่ยนจะเป็นสามเหลี่ยมปิดพอดีดังรูปที่ 2d ทั้งนี้เพราะถ้าหมุนรูป 2d ตามเข็มนาฬิกา 90 องศาก็จะเป็นรูปเดียวกับรูป 2b ดังนั้น C = (A+B) จึงเป็นการบวกแบบหางต่อหัว ซึ่งเป็นการบวกของ

เวกเตอร์ *จะเห็นว่าแม้ตัวพื้นที่เองไม่มีทิศแต่เราสามารถกำหนดทิศให้เป็นที่เข้าใจตรงกันได้* คือ กำหนดให้ตั้งฉากกับพื้นที่ และเมื่อเราสนใจพื้นที่ในด้านที่ใช้คำนวณฟลักซ์ พื้นที่เป็นเวกเตอร์



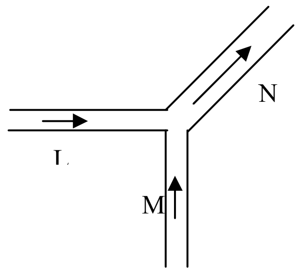
รูปที่2 พื้นที่มีทั้งขนาด ทิศทาง และประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พื้นที่มีสมบัติด้านอื่นอีกเช่นขนาดของพื้นที่(หน่วยเป็นตารางเมตร) เป็นต้น ในรูปที่ 2a นั้นแน่นอนว่าขนาดของ A+B ไม่เท่ากับขนาดของ C ถ้าเราซื้อแผ่นเหล็กขนาด A+B แต่คนขายให้แผ่น C มาแต่คิดเงินเราเท่ากับราคาของขนาด A+B เราก็คงไม่ยอม เพราะในกรณีเช่นนี้

$C \neq (A+B)$

นอกจากแรงและพื้นที่ดังได้ยกตัวอย่างมาแล้ว ปริมาณเวกเตอร์อื่นๆ(บางด้านของมัน)ล้วนแล้วแต่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งสิ้น ปริมาณเหล่านี้บางปริมาณเช่น การกระจัด ความเร็ว เห็นได้โดยง่ายว่าประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน บางปริมาณเช่นแรง ต้องทำการทดลอง บางปริมาณเช่น พื้นที่ ต้องทำการพิสูจน์ ดังได้กล่าวมาแล้ว

พึงระลึกว่ามีปริมาณมากมายที่มีทั้งขนาดและทิศทางแต่ไม่ใช่เวกเตอร์เพราะไม่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน ตัวอย่างเช่นน้ำในคลอง L และ M ไหลรวมกันเป็นคลอง N ดังรูปที่ 3 อัตราการไหลของน้ำมีทั้งขนาด(หน่วยเป็นลูกบาศก์เมตร/วินาที)และทิศทาง แต่ไม่ใช่เวกเตอร์เพราะไม่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน



รูปที่.3 อัตราการไหลของน้ำมีทั้งขนาดและทิศทางแต่ไม่ใช่เวกเตอร์

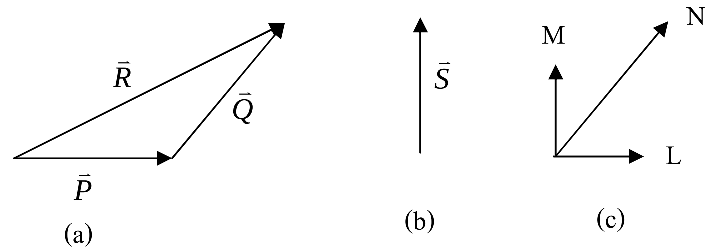
การกระจัดเชิงมุมก็เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและกำหนดทิศทางให้เป็นที่เข้าใจตรงกันได้แต่ไม่ใช่เวกเตอร์ ทั้งนี้ก็เพราะไม่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนานคือไม่มีสมบัติของการสลับที่ของการบวก อย่างไรก็ตามการกระจัดเชิงมุมขนาดเล็กมากๆเป็นเวกเตอร์ หรือก็คือความเร็วเชิงมุมเป็นเป็นเวกเตอร์นั่นเอง (หาอ่านได้จากตำราทางกลศาสตร์)

--ช่วงต่อไปจะให้ดูว่าปริมาณที่มีขนาดและทิศทางแต่ไม่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน ไม่สามารถใช้ scalar product และ vector product (ซึ่งเป็นพีชคณิตของเวกเตอร์) จึงไม่ใช่เวกเตอร์

พีชคณิตของเวกเตอร์บนพื้นฐานของการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เพื่อที่จะนำเวกเตอร์ไปใช้ประโยชน์จึงมีการนิยามพีชคณิตของเวกเตอร์ขึ้นมา scalar product และ vector product จัดได้ว่าเป็นพีชคณิตเบื้องต้นของเวกเตอร์ ซึ่งนิยามไว้สำหรับปริมาณที่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งอาจเห็นได้ดังต่อไปนี้

รูปที่ 4a $\vec{P},\vec{Q},\vec{R}$ เป็นเวกเตอร์ โดย $\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}$ รูป 4b เป็นเวกเตอร์ $\vec{S}$ ใดๆ รูป 4c เป็นอัตราการไหลของลำน้ำของรูปที่ 3 เพื่อความชัดเจนสมมติให้ $\vec{S}$ อยู่ในแนวดิ่ง L อยู่ในแนวระดับ M อยู่ในแนวดิ่ง ให้ทั้ง L และ M มีขนาด 1 ลูกบาศก์เมตร/วินาที ส่วน N ให้ทำมุม 45 องศากับแนวระดับ แน่นอนจากธรรมชาติของน้ำขนาดของ N เป็น 2 ลูกบาศก์เมตร/วินาที



รูปที่4 $\vec{P},\vec{Q},\vec{R}$ และ $\vec{S}$ เป็นเวกเตอร์
แต่ L,M และ N ไม่ใช่เวกเตอร์

เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่าย (โดยแตกเวกเตอร์ให้อยู่ในองค์ประกอบของพิกัดฉาก) ว่า scalar product

$$\vec{S}\cdot\vec{R} = \vec{S}\cdot(\vec{P}+\vec{Q}) = (\vec{S}\cdot\vec{P}) + (\vec{S}\cdot\vec{Q}) \qquad (1)$$

คือมีสมบัติการกระจาย(distributive) แต่ในกรณีของอัตราการไหลของน้ำจะไม่เป็นเช่นนี้ เห็นได้จาก $\vec{S}\cdot\mathrm{N} = \sqrt{2}\left|\vec{S}\right|$; $\vec{S}\cdot\mathrm{L} = 0$; $\vec{S}\cdot\mathrm{M} = \left|\vec{S}\right|$ หรือ

$$\vec{S}\cdot(\mathrm{L}+\mathrm{M}) \neq (\vec{S}\cdot\mathrm{L}) + (\vec{S}\cdot\mathrm{M}) \qquad (2)$$

ซึ่งไม่มีสมบัติการกระจาย กรณี vector product ก็จะคล้ายกัน คือ

$$\vec{S}\times\vec{R} = \vec{S}\times(\vec{P}+\vec{Q}) = (\vec{S}\times\vec{P}) + (\vec{S}\times\vec{Q}) \qquad (3)$$

มีสมบัติการกระจาย แต่ $\vec{S}\times(\mathrm{L}+\mathrm{M}) \neq (\vec{S}\times\mathrm{L}) + (\vec{S}\times\mathrm{M})$ (4)
ไม่มีสมบัติการกระจาย

จากสมการ 1 และ 3 จะเห็นว่าถ้าเป็นปริมาณที่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้ง scalar และ vector product จะมีสมบัติการกระจาย และจากอสมการ 2 และ 4 ถ้าเป็นปริมาณที่ไม่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนานจะไม่มีสมบัติการกระจาย การไม่มีสมบัติการกระจายจึงไม่เหมาะที่จะใช้นิยามของ scalar product และ vector product

ตัวอย่างเช่นมีวัตถุก้อนหนึ่งถูกแรงกระทำหลายแรง ถ้าเราหางานของแรงลัพธ์จะเท่ากับผลรวมของงานของแต่ละแรง ซึ่งเป็นไปตามกฎการกระจาย หรือถ้าหาทอร์กของแรงลัพธ์ก็จะเท่ากับผลรวมของทอร์กของแต่ละแรง ซึ่งเป็นไปตามกฎการกระจายเช่นกัน เราจึงใช้ประโยชน์ของงานและทอร์กได้

ดังนั้นจะเห็นว่า scalar product และ vector product ได้ถูกนิยามมาอย่างเหมาะสมสำหรับปริมาณที่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือก็คือนิยามไว้สำหรับเวกเตอร์นั่นเอง ไม่ได้นิยามไว้สำหรับปริมาณที่ไม่ใช่เวกเตอร์

สรุป เวกเตอร์ไม่ใช่เพียงแต่มีขนาดและทิศทาง (หรือสามารถกำหนดทิศทางให้เป็นที่เข้าใจตรงกันได้) เท่านั้น แต่ต้องประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนานด้วย จึงจะเรียกได้ว่าเป็นเวกเตอร์ ทั้งนี้เพราะสามารถใช้พีชคณิตของเวกเตอร์ได้

มีปริมาณมากมายบนโลกที่มีขนาดและทิศทาง แต่ไม่ใช่เวกเตอร์ เพราะไม่สามารถใช้พีชคณิตของเวกเตอร์

ป.ล. ถ้าผู้อ่านเป็นครู เมื่อสอนเด็กเรื่องเวกเตอร์อย่าลืม “และประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน” ด้วยนะครับ