เรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอน 6

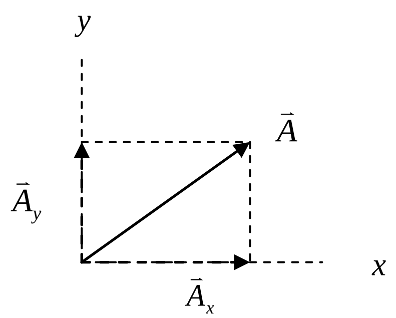
องค์ประกอบของเวกเตอร์ (components of a vector)

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล 27 พฤษภาคม 2556

ลองสังเกตดูจะพบว่าปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์หรือกฎทางฟิสิกส์ที่บรรยายด้วยเวกเตอร์นั้น เมื่อเวลาจะใช้งานจริง (คือเมื่อลงมือคำนวณจริงๆ) จะใช้ในลักษณะขององค์ประกอบหรืออาจอิงกับพิกัดที่เราเลือกขึ้นมาซึ่งก็แฝงแนวความคิดขององค์ประกอบอยู่ในนั้น ดังนั้นผู้เรียนฟิสิกส์ทุกคนจึงคุ้นเคยกับองค์ประกอบของเวกเตอร์ ผมก็เช่นกัน ได้ใช้องค์ประกอบของเวกเตอร์มานานแล้ว แต่แม้ ณ วันนี้ ผมก็ยังรู้สึกว่าตัวเองคล้ายจะเข้าใจ และก็คล้ายไม่เข้าใจ ผู้อ่านลองติดตามดูครับว่าทำไมผมจึงรู้สึกเช่นนี้

ถ้าลองไปเปิดตำราทั้งหลายดูจะพบว่าส่วนใหญ่แล้วจะกล่าวถึงองค์ประกอบของเวกเตอร์ใน 2 ลักษณะ คือ

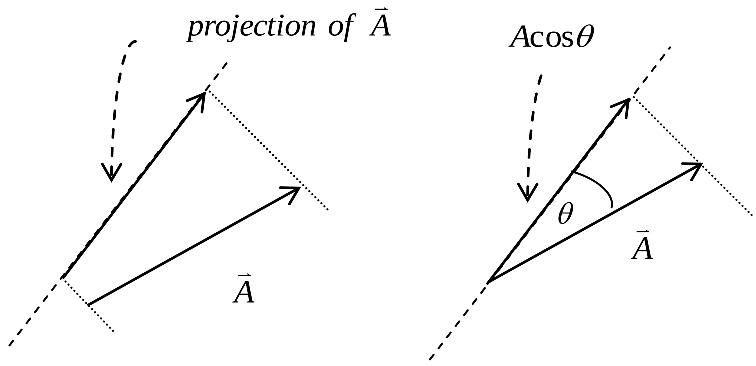
1)อ้างเทียบกับพิกัดฉากเลย ตัวอย่างใน 2 มิติ แสดงดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 องค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในแนวแกน x และ y

โดยบางตำราบอกว่า ถ้าแตก $\vec{A}$ ให้อยู่ในพิกัดฉาก สิ่งที่ได้คือองค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในแนว x และ y (และ z)

2) ไม่อ้างเทียบกับพิกัดฉาก แต่จะบอกเลยว่าองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแนวหนึ่งจะเท่ากับ projection (เงา) ของเวกเตอร์ในแนวนั้น ดังรูป 2 a ซึ่งเท่ากับ $A\cos\theta$ ดังรูป 2b



(a) (b)

รูป 2 (a) เงาของ $\bar{A}$ ตามแนวเส้นประ

(b) ขนาดเท่ากับ $A\cos\theta$

การกล่าวแบบแรกซึ่งไปอิงกับการแตกเวกเตอร์นั้นในความเห็นของผมค่อนข้างอันตราย อาจทำให้ผู้เรียนไขว้เขว เพราะองค์ประกอบของเวกเตอร์นั้นจริงๆแล้วมันมีความหมายของมัน เพียงแต่มันมีการเหลื่อมทับซ้อนกับสมบัติของพิกัดฉาก[*] ซึ่งผมจะได้กล่าวถึงในเรื่องเล่าตอนต่อไป

การกล่าวแบบที่สองเป็นการกล่าวแบบตรงความหมาย ไม่ทำให้ผู้เรียนไขว้เขว

คำถามคือ ทำไมองค์ประกอบของเวกเตอร์จึงเป็นดังรูปที่ 2 เป็นแบบอื่นไม่ได้หรือ ? อย่างเช่นเป็น $0.7A\cos\theta$?

ตำราทุกเล่มที่ผมเคยอ่านบอกว่ามันคือนิยาม ที่ผมสงสัยก็คือนิยามนี่แหละ ผมเชื่อว่านิยามทางคณิตศาสตร์ทุกนิยามสามารถสัมผัส(ด้วยจิตใจ)ถึงความเหมาะสมของมัน คนที่ตั้งนิยามขึ้นมาเขาเข้าใจ(หรืออาจมองเห็นเลาๆ) ถึงความเหมาะสมของนิยามที่เขาตั้งขึ้นมา แต่คนรุ่นหลังๆมักมองไม่ค่อยเห็น คือใช้ตามคนอื่นๆเลยเพราะรู้ว่ามันใช้ได้

ที่ผมจะพูดต่อไปนี้ ก็ไม่ใช่คำตอบ เป็นแค่ทำให้รู้สึกสบายใจที่จะยอมรับมันเท่านั้น

เริ่มจากพื้นฐานก่อนเลยคือองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแนวทิศหนึ่ง มันคืออะไร ?

คำตอบ มันคือผล (effect) ของเวกเตอร์นั้น ในแนวทิศนั้น

แล้วถ้าสมมติเวกเตอร์อันหนึ่งมีขนาดเป็น 10 หน่วย ผลของเวกเตอร์นี้ในแนวทิศอื่นที่ไม่ใช่ทิศของเวกเตอร์นี้ จะมากกว่า 10 หน่วย ได้หรือไม่ ?

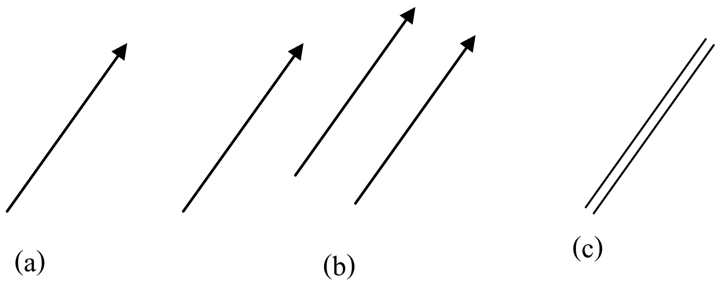
คำตอบ ไม่น่าได้ ถ้าได้มันดูแปลกๆ

---

[*] เป็นความรู้สึกของผมซึ่งไม่ได้รับประกันว่าถูกหรือถูกที่สุด มีหลายคนที่คิดว่าองค์ประกอบของเวกเตอร์มีความสัมพันธ์กับการแตกเวกเตอร์ โดยเขาก็มีมุมมองของเขาซึ่งก็มีส่วนถูก ผู้อ่านควรไตร่ตรองเอง และไม่ใช่แต่เรื่องเล่าตอนนี้แต่มีอีกหลายประเด็นในเรื่องเล่าตอนอื่นๆที่ผู้อ่านควรไตร่ตรองเอง

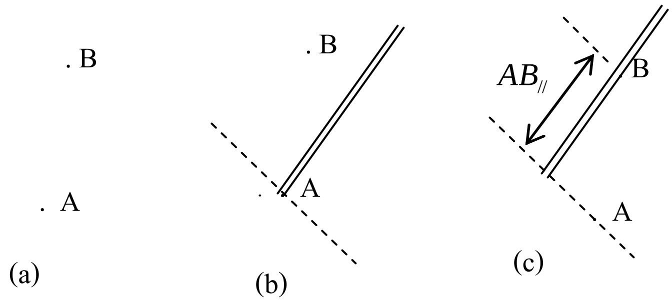
แล้วมันน่าจะเป็นเท่าใด ? ก่อนตอบคำถามนี้ เรามาย้อนดูคำว่าแนวทิศกันก่อน และเราจะใช้การกระจัดซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่เราคุ้นเคยดี เป็นตัวอย่าง

รูป 3 a แสดงแนวทิศหนึ่ง รูป 3b แสดงแนวทิศเดิม ที่ตำแหน่งต่างๆกัน และถ้าเรามองผ่านท่อกลวงตรง ซึ่งเอียงในแนวทิศเดียวกัน ดังรูป 3 c สิ่งที่เราสังเกต (คำว่าสังเกตนั้นจริงๆแล้วคือการวัด)ได้ในท่อนี้ ก็คือสิ่งที่สังเกตเห็นในแนวทิศของ รูป 3 a นั่นเอง



รูป 3 (a) แสดงแนวทิศหนึ่ง (b) แนวทิศเดียวกันที่ตำแหน่งต่างกัน
(c) ท่อกลวงตรงอยู่ในแนวทิศเดียวกับรูป a และ b

สมมติมีอนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่จากจุด A ไปจุด B ดังรูปที่ 4 a ขนาดของการกระจัดในแนวทิศในรูปที่ 3 เป็นเท่าใด ?



รูป 4 (a) A เป็นจุดเริ่มต้น B เป็นจุดสุดท้าย (b) ปลายท่ออยู่ที่ A เส้นประตั้งฉากกับท่อ (c) $A_{//}$ คือ ขนาดของการกระจัดตามแนวของท่อ

คำว่า "แนวทิศ" คงไม่เป็นอะไรที่โค้งๆ มันน่าจะเป็นอะไรที่ตรงๆมากกว่า ตัวอย่างเช่น มองไปทางทิศตะวันออกก็คือมองตรงๆไปทางทิศตะวันออก เราจึงจะใช้ท่อกลวงตรงมาช่วยในการวัด เพื่อความสะดวกเรากำหนดให้ปลายท่อด้านล่างเป็นจุดกำเนิดของการวัดระยะทางในท่อ

เมื่อเริ่มต้นให้จุด A อยู่ที่ปลายท่อด้านล่าง การวัดระยะของ B ในแนวของท่อเราต้องเลื่อนท่อให้ B มาอยู่ในท่อโดยแนวทิศของท่อไม่เปลี่ยน แต่เราจะเลื่อนในลักษณะใด ? *ถ้าพิจารณาดูจะพบว่า* ขนาดของการกระจัดในแนวท่อหาได้จากการเลื่อนให้ปลายท่อด้านล่างให้อยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับท่อ คือตามแนวของเส้นประในรูป 4b จนจุด B อยู่ในท่อ ระยะจากปลายล่างของท่อจนถึงจุด B เป็นขนาดของการกระจัดตามแนวทิศของท่อ คือ $AB_{//}$ ดังรูป 4c

ตรง *ถ้าพิจารณาดูจะพบว่า* นี่แหละที่มันแฝงความเหมาะเจาะ ความน่าจะเป็นเช่นนี้เอาไว้ พึงสังเกตว่าเราต้องเลื่อนปลายท่อด้านล่างให้อยู่ในระนาบที่*ตั้งฉาก*กับท่อ เพื่อหาขนาดของการกระจัดตามแนวของท่อนี้ และสังเกตอีกครั้งว่า*ตั้งฉาก* [*]มักโผล่มายุ่งเกี่ยวกับเราเสมอ ถ้าเราไม่เลื่อนท่อให้ปลายท่อด้านล่างให้อยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับท่อ ขนาดของการกระจัดตามแนวทิศของท่อจะมีนับไม่ถ้วนค่า ซึ่งขัดกับสิ่งที่ควรเป็น คือควรมีค่าเดียว และค่าเดียวที่เหมาะๆมันมาจากการเลื่อนให้ตั้งฉากนี่แหละ

ขนาดของการกระจัดตามแนวทิศของท่อที่กล่าวก็คือองค์ประกอบของการกระจัดในแนวทิศของท่อ โดยหลักการแล้วถ้าเราวัดการกระจัดในแนวของท่อเป็นฟังก์ชันของเวลาได้ เราก็หาองค์ประกอบของความเร็วและความเร่งในแนวของท่อได้จากการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองเทียบกับเวลา

การหาองค์ประกอบของพื้นที่ในแนวทิศหนึ่งก็ทำได้คล้ายกัน คือใช้ท่อมองไปในแนวทิศนั้นเห็นพื้นที่เท่าใดก็คือองค์ประกอบของพื้นที่ในแนวทิศนั้น ท่านผู้อ่านลองหยิบแผ่นกระดาษเล็กๆมาสักแผ่น มองมุมโน้นมุมนี้ดู ก็จะเห็นเป็นดังที่ผมว่า

การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง พื้นที่ ซึ่งกล่าวมานั้น เป็นปริมาณเวกเตอร์ที่เราใช้ท่อเป็นเครื่องมือช่วยในการวัดองค์ประกอบของเวกเตอร์เหล่านี้ เนื่องจากเราแทนเวกเตอร์ได้ด้วยลูกศร พิจารณาดูจะเห็นว่าถ้าท่ออยู่ในแนวทิศลูกศรจะวัดองค์ประกอบได้มากที่สุด และจะวัดได้เป็นศูนย์ถ้าท่ออยู่ในแนวตั้งฉากกับลูกศร ถ้าท่ออยู่ในแนวที่ทำมุม θ กับลูกศรองค์ประกอบจะเท่ากับ เงาของเวกเตอร์ในแนวนั้น ดังรูป 2 a ซึ่งเท่ากับ $A\cos\theta$ ดังรูป 2b

สำหรับปริมาณเวกเตอร์เช่นแรง ทอร์ก สนามแม่เหล็ก และอื่นๆอีกที่ ใช้ท่อช่วยในการมองโดยตรงไม่ได้ แต่แทนได้ด้วยลูกศรเหมือนกันเราคาดว่าองค์ประกอบของมันน่าจะเป็นดังรูปที่ 2 เช่นกัน คือเราคาดว่าไม่ว่าจะเป็นปริมาณเวกเตอร์ใดก็ตาม

องค์ประกอบของเวกเตอร์ในแนวทิศหนึ่ง = เงาของเวกเตอร์ในแนวทิศนั้น (1)

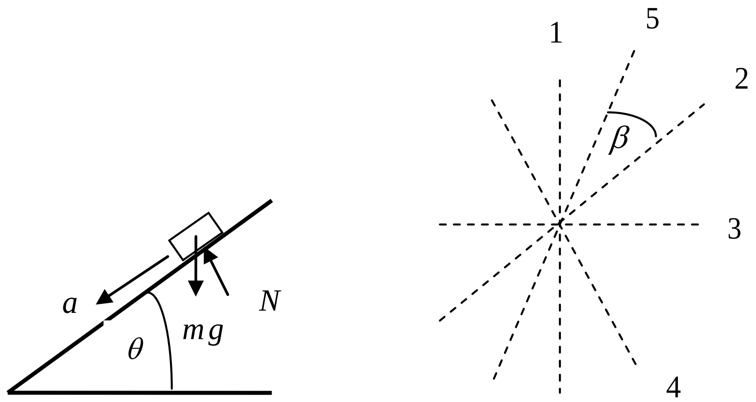
พึงสังเกตว่าสมการ 1 นี้ไม่ได้มาจากการแตกเวกเตอร์ให้อยู่ในพิกัดฉาก 1 ดังนั้นผมจึงมองว่ามันเพียงแต่มีการเหลื่อมทับซ้อนกับสมบัติของพิกัดฉาก

---

[*] ตั้งฉากในที่นี้ ไม่ใช่เพียงแต่การทำมุม 90 องศาของเส้นตรงสองเส้น แต่หมายถึงการไม่มีองค์ประกอบของอันหนึ่ง บนอีกอันหนึ่งเลย ตัวอย่างเช่นฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่ตั้งฉากกัน ศัพท์ที่ตรงประเด็นกว่าคือ orthogonal

เราไม่สามารถพิสูจน์สมการ 1 เพียงแต่เราคาดว่ามันน่าจะเป็นเช่นนี้ อันที่จริงมันคล้ายๆ จะเป็นสมมุติฐานมากกว่านิยาม โดยถ้าเราใช้สมการ 1 ในการคำนวณและเปรียบเทียบค่าที่คำนวณได้เทียบกับผลการทดลองแล้วสอดคล้องกันทุกครั้งไป เราก็ยอมรับว่าสมการ 1 เป็นจริง ตัวอย่างข้างล่างเป็นตัวอย่างง่ายๆที่แสดงความสมเหตุผลของสมการ 1

<u>ตัวอย่าง</u> กล่องมวล m วางบนพื้นเอียงลื่นซึ่งทำมุม θ กับแนวระดับ ดังรูป 5a จงหาความเร่งของกล่องและแรงที่พื้นเอียงกระทำต่อกล่อง



รูป 5 (a) (b)

<u>วิธีทำ</u> แรงที่กระทำต่อกล่องมีแรง N ที่พื้นเอียงกระทำต่อกล่องในแนวตั้งฉากกับพื้นเอียง และแรงดึงดูดของโลก mg ดังรูป 5a ส่วนรูป 5b แสดงแนวทิศต่างๆโดย 1 คือแนวดิ่ง 2 คือแนวตามพื้นเอียง 3 คือแนวระดับ 4 คือแนวตั้งฉากกับพื้นเอียง และ 5 คือแนวที่ทำมุม β กับพื้นเอียง พึงระลึกว่าความเร่ง a อยู่ในแนว 2 และองค์ประกอบของความเร่ง a ในแนว 4 เป็นศูนย์ จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สอง $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ทางซ้ายมือเป็นเวกเตอร์ทางขวามือก็เป็นเวกเตอร์ เวกเตอร์ทั้งสองเท่ากันองค์ประกอบในทิศใดๆต้องเท่ากัน ดังนั้น

ในแนว 1 จะได้ $mg - N\cos\theta = ma\sin\theta$ (2)

แนว 2 $mg\sin\theta = ma$ (3)

แนว 3 $N\sin\theta = ma\cos\theta$ (4)

แนว 4 $mg\cos\theta - N = 0$ (5)

แนว 5 $mg\sin(\theta+\beta) - N\sin\beta = ma\cos\beta$ (6)

สมการเหล่านี้ถ้าเลือกมาสองสมการก็สามารถหาสมการอื่นได้ ตัวอย่างเช่น สมการ 5 หาได้จากสมการ 3 และ 4 หรือสมการ 3 หาได้จากสมการ 5 และ 6 เป็นต้น ทั้งนี้เพราะปัญหานี้เป็นปัญหาในสองมิติ เวกเตอร์ทุกอันอยู่ในระนาบของกระดาษ ดังนั้นจึงมีจำนวนสมการที่

นำไปใช้ประโยชน์ได้ไม่เกินสองสมการ เมื่อใช้สมการเหล่านี้สองสมการ โดยสมการทั้งสองไม่จำเป็นต้องมาจากแนวที่ตั้งฉากกัน เพียงแต่อย่าให้อยู่ในแนวเดียวกัน ก็สามารถหา N และ a ได้ ถ้าเรามีเครื่องมือวัด N และ a ค่าที่คำนวณกับค่าที่วัดจะสอดคล้องกัน ซึ่งแสดงว่าแนวความคิดองค์ประกอบของเวกเตอร์ (สมการ 1) น่าจะสมเหตุผล

ตัวอย่างข้างบนเป็นตัวอย่างหนึ่งที่แสดงให้เห็นความสำคัญขององค์ประกอบของเวกเตอร์ ซึ่งจะเห็นว่ากฎทางฟิสิกส์ที่บรรยายโดยเวกเตอร์คือ “แรงลัพธ์ที่กระทำต่ออนุภาค เท่ากับมวลของอนุภาคคูณด้วยความเร่งของอนุภาค” หรือเขียนสั้นๆเป็น $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ เมื่อใช้งานจริงนั้นใช้ในลักษณะขององค์ประกอบ อันที่จริงแล้วน่าจะเป็นการตรงประเด็นในการใช้งานถ้าจะกล่าวเพิ่มเติมในรูปแบบขององค์ประกอบให้นักเรียน นักศึกษา ฟังว่า “องค์ประกอบของแรงลัพธ์ที่กระทำต่ออนุภาคในแนวหนึ่ง (แนวใดก็ได้) เท่ากับองค์ประกอบของมวลของอนุภาคคูณด้วยความเร่งของอนุภาคในแนวนั้น” จากประสบการณ์ในการสอนของผมพบว่าทำให้เด็กๆใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันได้ดีขึ้น

องค์ประกอบของเวกเตอร์ในสมการ 1 นั้นมีความหมายเฉพาะปริมาณที่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่านั้น ไม่มีความหมายสำหรับปริมาณที่มีขนาดและทิศทางแต่ไม่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน ตัวอย่างเช่นถ้า N เป็นอัตราการไหลของลำน้ำซึ่งทำมุม θ กับแนวระดับ เมื่อแตกให้อยู่ในพิกัดฉากโดยใช้สมการ 1 จะได้อัตราการไหลในแนว x, y เป็น $N\cos\theta$ และ $N\sin\theta$ ตามลำดับ และถ้านำมาบวกกันโดยบวก<u>*ตามธรรมชาติของลำน้ำ*</u> จะได้ $N\cos\theta + N\sin\theta$ ซึ่งไม่กลับไปเป็น N เหมือนเดิม ทั้งนี้เพราะแม้อัตราการไหลของลำน้ำแม้มีขนาดและทิศแต่ไม่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน(คือไม่ใช่เวกเตอร์) แต่ถ้าเป็นเวกเตอร์เมื่อแตกให้อยู่ในพิกัดฉากโดยใช้สมการ 1 ถ้าบวกเวกเตอร์ย่อยจะได้เวกเตอร์เดิม