เรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอน 8

สมบัติบางอย่างของพิกัดฉาก

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล 4 มิถุนายน 2556

เราจะมาดูสมบัติบางอย่างของพิกัดฉาก

รูป 1 a แสดงองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในแนว 1 และ 2 โดย $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ และ A_1, A_2 เป็นเวกเตอร์หน่วยและองค์ประกอบ ในแนวทิศ 1 และ 2 ตามลำดับ จะเห็นว่า

$$\vec{A} \neq A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 \qquad (1)$$

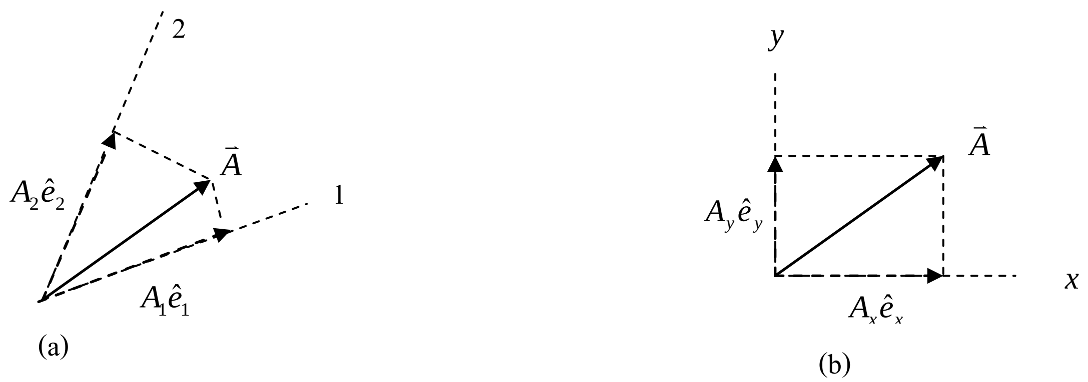

Fig.1 (a) องค์ประกอบ $\vec{A}$ ในแนวที่ไม่ตั้งฉากกัน (b) องค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในแนวที่ตั้งฉากกัน

รูป 1 b แสดงองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในที่ตั้งฉากกัน คือแตกให้อยู่ในพิกัดฉาก คราวนี้จะเห็นว่า

$$\vec{A} = A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y \qquad (2)$$

ซึ่งมันเป็นความเหมาะเจาะของพิกัดฉาก ความเหมาะเจาะนี้เป็นจุดเด่นอันหนึ่งของพิกัดฉาก จุดเด่นอันที่สองคือระยะทางระหว่างจุดสองจุดในพิกัดฉาก หาได้โดยง่ายด้วยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ลองดูตัวอย่างที่ 1 ข้างล่าง

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ขว้างก้อนหินด้วยอัตราเร็ว u ทำมุม θ กับแนวราบดังรูปที่ 2

a) เมื่อเวลาผ่านไป t จงหาตำแหน่งของก้อนหิน
b) เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที หลังจากขว้างก้อนหินก้อนแรก ก็ขว้างก้อนหินก้อนที่สองด้วยอัตราเร็ว u ทำมุม θ กับแนวราบ ดังเดิม หลังจากขว้างก้อนหินก้อนที่สองเป็นเวลา 5 วินาที จงหาระยะห่างระหว่างก้อนหินทั้งสอง

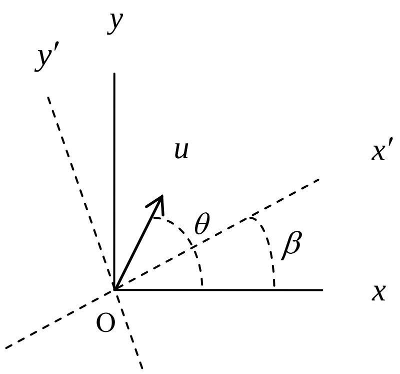

Fig.2 x อยู่ในแนวระดับ y อยู่ในแนวดิ่ง x' ทำมุม β กับ x
แกนทุกแกนอยู่ในระนาบของกระดาษ

<u>วิธีทำ</u> ความเร่งของก้อนหินเท่ากับ g ทิศชี้ลง

a) ในแนว x องค์ประกอบของ g และ u ในแนวนี้เท่ากับศูนย์และ $u\cos\theta$ ตามลำดับ ดังนั้นจะได้ $x = ut\cos\theta$ (3)

ในแนว y องค์ประกอบของ g และ u ในแนวนี้เท่ากับ g และ $u\sin\theta$ ตามลำดับ ดังนั้นจะได้

$$y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

ในแนว x' องค์ประกอบของ g และ u ในแนวนี้เท่ากับ $-g\sin\beta$ และ $u\cos(\theta-\beta)$ ตามลำดับ ดังนั้นจะได้

$$x' = ut\cos(\theta-\beta) - \frac{1}{2}gt^2\sin\beta \quad (5)$$

ในแนว y' องค์ประกอบของ g และ u ในแนวนี้เท่ากับ $-g\cos\beta$ และ $-u\sin(\beta-\theta)$ ตามลำดับ ดังนั้นจะได้

$$y' = -ut\sin(\beta-\theta) - \frac{1}{2}gt^2\cos\beta \quad (6)$$

สมการ 3-7 ซึ่งหาจากองค์ประกอบของเวกเตอร์ เป็นจริงทั้งนั้น และเนื่องจากปัญหานี้เป็นปัญหาในสองมิติ ไม่ว่าจะเลือกสมการใดก็ได้สองสมการ ก็สามารถบอกตำแหน่งได้อย่างชัดแจ้งไม่กำกวม (unique) ทั้งนั้น (พิกัดเอียงก็สามารถบอกตำแหน่งของจุดใดๆในระนาบได้) ขอเพียงแต่อย่าให้มุม β เป็นมุมที่พอดีแกนทั้งสองทับกัน

ถ้าเลือกแกนที่ตั้งฉากกัน เช่นเลือกแนว x กับแนว y จะเขียนได้ว่า

เวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{R} = ut\cos\theta\,\hat{e}_x + (ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2)\hat{e}_y$ (7)

แต่ถ้าเลือกแนวที่ไม่ตั้งฉากกัน เช่น x และ x' จะเห็นว่า

$$\vec{R} \neq ut\cos\theta\,\hat{e}_x + \{ut\cos(\theta-\beta) - \frac{1}{2}gt^2\sin\beta\}\hat{e}_{x'} \quad (8)$$

เมื่อ $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ และ $\hat{e}_{x'}$ คือเวกเตอร์หน่วยในแนว x, y และ x' ตามลำดับ ดังนั้นเราจึงมักแก้ปัญหาโดยใช้พิกัดฉาก

b) ถ้าเลือกแกนที่ตั้งฉากกัน เช่นเลือกพิกัดฉาก x, y จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

ระยะห่างระหว่างก้อนหินทั้งสอง $= \sqrt{\{2u\cos\theta\}^2 + \left\{(2u\sin\theta - \frac{24}{2}g)\right\}^2}$ (9)

หรือถ้าเลือกพิกัดฉาก x', y' ก็คำนวณหาระยะห่างได้โดยง่ายเช่นกัน แต่ถ้าเลือกแนวที่ไม่ตั้งฉากกัน การหาระยะห่างจะยุ่งยากกว่านี้ จากตัวอย่างที่ 1 นี้ จะเห็นว่าการใช้แนวคิดองค์ประกอบของเวกเตอร์ใช้ได้กับทุกแนว (องค์ประกอบของ $\bar{u}$ และ $\bar{g}$) แต่การที่เราแตกทั้ง u และ g ให้อยู่ในพิกัดฉากนั้น เพราะเป็นการสะดวกที่จะใช้พิกัดฉากในการบอกตำแหน่ง และสะดวกในการหาระยะทาง

ตัวอย่างที่ 2 ข้างล่าง จะแสดงให้เห็นสมบัติอีกอันของพิกัดฉาก คือเวกเตอร์หน่วยของมันไม่ขึ้นกับตำแหน่ง * จึงเหมาะสมที่จะนำมาใช้เมื่อเราต้องการอินทิเกรตเวกเตอร์

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> เส้นฉนวนซึ่งเป็นส่วนโค้งยาว $\frac{1}{4}$ ของเส้นรอบวงวงกลมซึ่งมีรัศมี R จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีประจายอยู่แบบไม่สม่ำเสมอขึ้นกับมุม θ ดังรูปที่ 3 โดยกระจายด้วยความหนาแน่น $C\sin\theta$ คูลอมบ์/เมตร เมื่อ C คือค่าคงที่ จงหาขนาดและทิศทางของสนามไฟฟ้าที่จุดกำเนิด

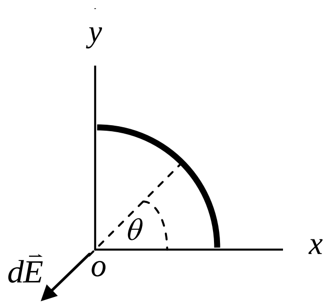

Fig.3 ส่วนย่อยของเส้นฉนวนยาว $Rd\theta$ ทำให้เกิดสนามไฟฟ้าย่อย $d\bar{E} = \frac{C\sin\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-\hat{e}_r\right)$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาส่วนย่อยใดๆของเส้นฉนวนซึ่งยาว $Rd\theta$ ส่วนย่อยนี้ทำให้เกิดสนามไฟฟ้าย่อย $d\bar{E}$ ที่จุดกำเนิด โดย

* พิกัดที่เราใช้บ่อยๆในวิชาฟิสิกส์คือพิกัดฉาก พิกัดทรงกระบอก และพิกัดทรงกลม (รวมทั้งพิกัดเชิงขั้วในระนาบซึ่งเป็นกรณีย่อยของพิกัดทรงกระบอกหรือพิกัดทรงกลม) โดยเวกเตอร์หน่วยของพิกัดทรงกระบอก และพิกัดทรงกลมนั้นที่ตำแหน่งต่างกัน มักมีทิศเปลี่ยนไป

$$d\bar{E} = \frac{C\sin\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-\hat{e}_r\right) \qquad (10)$$

โดย $\hat{e}_r$ คือเวกเตอร์หน่วยของพิกัดเชิงขั้วในระนาบ เมื่อรวม(ด้วยการอินทิเกรต)สนามไฟฟ้าย่อยเหล่านี้ตั้งแต่ $\theta = 0$ ถึง $\theta = \frac{\pi}{2}$ ก็จะได้สนามไฟฟ้าตามที่ต้องการ คือ

$$\bar{E} = \int_0^{\pi/2} \frac{C\sin\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-\hat{e}_r\right) \qquad (11)$$

พึงสังเกตว่าเมื่อ θ เปลี่ยน ทิศของ $\hat{e}_r$ เปลี่ยนไปด้วย ทำให้อินทิเกรตไม่ได้ เราจึงแตกทางขวามือของสมการ 11 ให้อยู่ในพิกัดฉาก ซึ่งจะได้

$$\bar{E} = \int_0^{\pi/2} \frac{C\sin\theta\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-\cos\theta\,\hat{e}_x - \sin\theta\,\hat{e}_y\right) \qquad (12)$$

คราวนี้เมื่อ θ เปลี่ยน ทั้ง $\hat{e}_x$ และ $\hat{e}_y$ ไม่เปลี่ยนทิศ การอินทิเกรตจึงเหมือนการอินทิเกรตสเกลาร์ ซึ่งสุดท้าย จะได้

$$\bar{E} = -\frac{C}{8\pi\varepsilon_0 R}\,\hat{e}_x - \frac{C}{16\varepsilon_0 R}\,\hat{e}_y \qquad (13)$$

ดังนั้น ขนาดของสนามไฟฟ้า $\left|\bar{E}\right| = \frac{C}{16\pi\varepsilon_0 R}\sqrt{4+\pi^2}$

โดยทำมุม $\theta = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ตัวอย่างที่ 2 นี้ จะเห็นว่าการที่เราแตก $d\bar{E}$ ให้อยู่ในพิกัดฉากนั้น วัตถุประสงค์คือจะใช้พิกัดฉากในการอินทิเกรต

คราวนี้ท่านผู้อ่านคงพอจับความได้แล้วนะครับว่า ในเรื่องเล่าตอน 6 ทำไมผมจึงบอกว่า องค์ประกอบของเวกเตอร์นั้นจริงๆแล้วมันมีความหมายของมัน เพียงแต่มันมีการเหลื่อมทับซ้อนกับสมบัติของพิกัดฉาก การสอนองค์ประกอบของเวกเตอร์โดยอ้างอิงถึงการแตกเวกเตอร์ในพิกัดฉากมักทำให้ขาดความตระหนักถึงความหมายขององค์ประกอบของเวกเตอร์