เรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอนที่ 9 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล

2 มกราคม 2565

ขอขอบคุณ ดร.สุภัคชัย พงศ์เลิศสกุล ที่ช่วยตรวจทานและให้ข้อเสนอแนะในเรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆตอนที่ 9 และ 10

หลังจากที่ผมเขียนเรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆตอนที่ 8 ในปี 2556 ก็ไม่ได้คิดว่าจะเขียนตอนอื่นอีก แต่หลังจากเกษียณแล้วภาควิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศิลปากรมีหลักสูตรใหม่ซึ่งร่วมกับคณะศึกษาศาสตร์คือหลักสูตรครูฟิสิกส์ ผมจึงเขียนเรื่องกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองนี้โดยเชื่อว่า

1) ปัจจุบันแม้ในการสอนครูจะสอนเนื้อหาที่พอเหมาะกับนักเรียน แต่ครูต้องรู้มากกว่าที่สอนนักเรียน ไม่ใช่รู้เท่ากับที่สอนนักเรียน

2) อีกสามสิบหรือสี่สิบปีข้างหน้า การเรียนการสอนอาจเปลี่ยนแนว คนที่เรียนฟิสิกส์อาจเป็นคนที่ต้องใช้ฟิสิกส์จริงๆ คนที่ไม่ต้องใช้ก็ไม่ต้องเรียน คนที่เรียนฟิสิกส์อาจจะต้องการเรียนฟิสิกส์เพื่อไปเป็นพื้นฐานของวิชาในสาขาอื่น เพราะโดยธรรมชาติของฟิสิกส์มันมักจะเป็นพื้นฐานของสาขาอื่น

การเขียนจะมี 2 ตอน คือตอนที่ 9 จะเป็นตอนที่กล่าวถึงกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองกรณีที่ผู้สังเกตอยู่ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย อีกตอนคือตอนที่ 10 การดัดแปลงกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเพื่อใช้กับกรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง

ตอนที่ 9 ประกอบด้วย

ตอนที่ 9.1 เวกเตอร์ตำแหน่ง การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง พิกัดฉาก และบางมุมมองของอนุพันธ์เทียบกับเวลาของสเกลาร์และเวกเตอร์

ตอนที่ 9.2 กรอบอ้างอิงเฉื่อย กฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่ง แรงจริงและกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สาม

ตอนที่ 9.3 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองกรณีอนุภาค

ตอนที่ 9.4 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองกรณีระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง

ระดับของเนื้อหาจะอยู่ในระดับมัธยม คือแรงและความเร่งของวัตถุคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา ถ้ามีการใช้แคลคูลัสจะเน้นที่ความหมาย ไม่เน้นเทคนิคทางคณิตศาสตร์

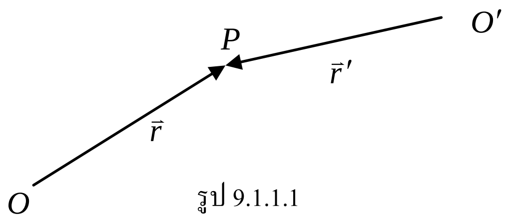
ตอนที่ 9.1 เวกเตอร์ตำแหน่ง การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง พิกัดฉาก และบางมุมมองของอนุพันธ์เทียบกับเวลาของสเกลาร์และเวกเตอร์

เราจะเริ่มด้วยเวกเตอร์พื้นฐานที่ใช้บรรยายการเคลื่อนที่ 4 เวกเตอร์ คือเวกเตอร์ตำแหน่ง การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง จากนั้นจะพูดถึงพิกัดที่เราใช้บ่อยๆคือพิกัดฉาก ตามด้วยอนุพันธ์เทียบกับเวลาในมุมมองที่เราต้องการเน้น

9.1.1. เวกเตอร์ตำแหน่ง (position vector)

เวกเตอร์ตำแหน่งของจุดๆหนึ่ง(หรืออนุภาคตัวหนึ่ง) คือเวกเตอร์ที่ลากจากจุดกำเนิดไปยังจุดๆนั้น

รูป 9.1.1.1 แสดงเวกเตอร์ตำแหน่ง $\bar{r}$ และ $\bar{r}'$ ของจุด P เมื่ออ้างอิงกับจุด O และ O'



รูป 9.1.1.1

จะเห็นว่าถ้าจุดอ้างอิงเป็นคนละจุด เวกเตอร์ตำแหน่งก็เป็นคนละเวกเตอร์

ต่อไปเราจะมาดูสถานการณ์ที่อาจมีนักศึกษาบางคนรู้สึกสับสน

สมมติมีรถยนต์คันหนึ่ง รถยนต์คันนี้ถือได้ว่าเป็นกรอบอ้างอิงอันหนึ่ง เมื่อเริ่มต้นรถอยู่นิ่ง นายแดงนั่งนิ่งที่เก้าอี้ในรถ มีแมลงวันเกาะนิ่งบนเพดานรถ ให้ $\bar{r}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของแมลงวัน จุดกำเนิดของเวกเตอร์ตำแหน่งอยู่ที่นายแดง

ต่อมาให้รถเคลื่อนที่ จะเคลื่อนที่อย่างไรก็ได้ จะเคลื่อนที่ไปตรงๆ หรือโค้ง หรือหกคะเมนตีลังกา มีความเร่งหรือไม่มี ได้ทั้งนั้น โดยทั้งนายแดงและแมลงวันอยู่ที่ตำแหน่งเดิมในรถ

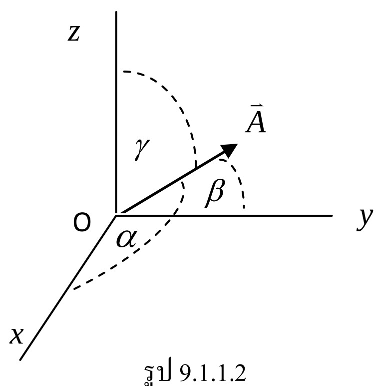
คำถามคือนายแดงจะเห็นเวกเตอร์ตำแหน่งของแมลงวันเปลี่ยนไปหรือไม่ ?

ถ้าจะถามให้ชัดกว่านี้ คือนายแดงจะเห็นเวกเตอร์ตำแหน่งของแมลงวันมีขนาดเท่าเดิมหรือไม่ ? ทิศชี้ทิศเดิมหรือไม่ ?

ขนาดคงตอบได้ไม่ยากว่าคงเดิม แต่ทิศอาจมีคนสับสน เพื่อความเข้าใจลองดูตัวอย่างในชีวิตประจำวัน สมมติมีต้นมะม่วงอยู่ทางทิศเหนือของบ้าน เรารู้ว่าโลกหมุน แต่ไม่ว่าจะเป็นเวลาเช้าสายบ่ายเย็นเราก็ยังคงเห็นต้นมะม่วงอยู่ทางทิศเหนือของบ้าน การหมุนของโลกไม่ได้ทำให้เรารู้สึกว่าทิศของต้นมะม่วงเปลี่ยนไป

มันจะเข้าใจได้ง่ายถ้าเราใช้การบอกทิศในทางคณิตศาสตร์มาเทียบเคียง ในทางคณิตศาสตร์เขาบอกทิศของเวกเตอร์โดยอ้างอิงกับพิกัดฉากชุดหนึ่ง ทิศของเวกเตอร์บอกด้วยมุม 3 มุมที่เวกเตอร์นั้นทำกับแกน x, y และ z (จริงๆแล้วเขาบอกเป็นโคไซน์ของมุมทั้งสามเพราะมันสะดวกในการนำไปใช้)

รูปที่ 9.1.1.2 แสดงการบอกทิศของเวกเตอร์ $\vec{A}$ อันหนึ่งซึ่งถ้าเราเขียนในพิกัดฉากจะเขียนได้เป็น $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ทิศของเวกเตอร์ $\vec{A}$ บอกด้วยมุม α , β และ γ ที่เวกเตอร์นี้ทำกับแกน x, y และ z



รูป 9.1.1.2

โดย $\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}$, $\cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}$, $\cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$

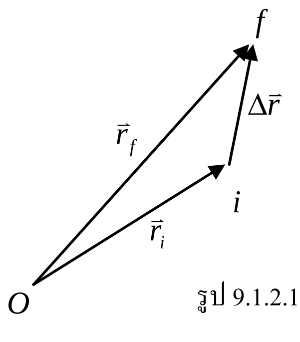
ย้อนกลับไปดูรถยนต์ ถ้าเราสร้างพิกัดฉาก<u>ติดไปกับรถ</u>โดยให้จุดกำเนิด O ติดไปกับนายแดง ถ้าแมลงวัน<u>เกาะนิ่ง</u>ติดกับเพดานรถ ไม่ว่ารถยนต์จะเคลื่อนที่อย่างไรก็ตามนายแดงจะเห็นพิกัดของแมลงวันคงเดิม ตัวอย่างเช่นถ้าเมื่อเริ่มต้น $x = 3$ เมตร $y = 1$ เมตร $z = 2$ เมตร หลังจากนั้นไม่ว่ารถยนต์จะหกคะเมนตีลังกาอย่างไรก็ตาม x ก็จะยังคงเป็น 3 เมตร y ยังคงเป็น 1 เมตร ส่วน z ยังคงเป็น 2 เมตรเหมือนเดิม ซึ่งจะได้ว่าตลอดเวลา $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{14}}$ คือนายแดงเห็นทิศของเวกเตอร์ตำแหน่งของแมลงวันไม่เปลี่ยน ขนาดก็ไม่เปลี่ยนเพราะเท่ากับ $\sqrt{14}$ เมตร ตลอดเวลา ก็คือนายแดงจะสังเกตเห็นเวกเตอร์ตำแหน่งของแมลงวันไม่เปลี่ยน

การที่นายแดงเห็นเวกเตอร์ตำแหน่งของแมลงวันไม่เปลี่ยน คือนายแดงเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ตำแหน่งของแมลงวันเป็นศูนย์ เราบรรยายด้วยคณิตศาสตร์ว่า

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_{\text{แดง}} = 0$$

9.1.2 การกระจัด

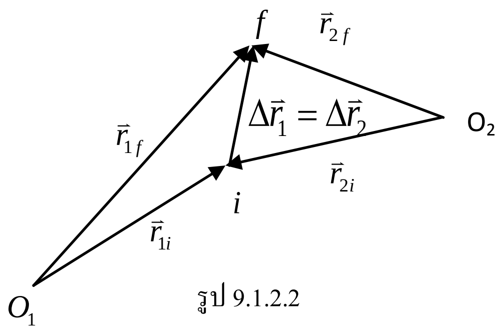
นิยามของการกระจัดคือเวกเตอร์ตำแหน่งที่เปลี่ยนไป ซึ่งก็คือเวกเตอร์ตำแหน่งสุดท้าย ลบด้วยเวกเตอร์ตำแหน่งเริ่มต้น สัญลักษณ์ของการกระจัดคือ $\Delta\bar{r}$ สมมติอนุภาคตัวหนึ่งเดิมอยู่ที่ตำแหน่ง i (ย่อจาก initial) จากนั้นเคลื่อนที่ไปอยู่ที่ตำแหน่ง f (ย่อจาก final) จะได้การกระจัด $\Delta\bar{r} = \bar{r}_f - \bar{r}_i$ ดังในรูป 9.1.2.1



รูป 9.1.2.1

ต่อไปจะยกตัวอย่างเพื่อให้เห็นว่าตำแหน่งของผู้สังเกตไม่สำคัญในการสังเกตการกระจัด ขอแต่เพียงให้อยู่ในกรอบอ้างอิงเดียวกัน

ย้อนไปพิจารณารถยนต์ในหัวข้อ 9.1.1 แต่คราวนี้สมมติมีนายแดงและนายดำนั่งอยู่บนรถยนต์ เวกเตอร์ตำแหน่งของแมลงวัน $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ มีจุดกำเนิด O_1 และ O_2 อยู่ที่นายแดงและนายดำตามลำดับ จากนั้นให้แมลงวันบิน ในช่วงเวลาหนึ่งนายแดงเห็นการกระจัดของแมลงวันเป็น $\Delta\vec{r}_1 = \vec{r}_{1f} - \vec{r}_{1i}$ ส่วนนายดำเห็นการกระจัดของแมลงวันเป็น $\Delta\vec{r}_2 = \vec{r}_{2f} - \vec{r}_{2i}$ แต่จากรูปที่ 9.1.2.2 จะเห็นว่า $\Delta\vec{r}_1$ กับ $\Delta\vec{r}_2$ คือเวกเตอร์เดียวกัน



รูป 9.1.2.2

ทั้งนายแดงและนายดำอยู่ในกรอบอ้างอิงเดียวกันเพราะอยู่ในรถยนต์คันเดียวกัน ดังนั้นผู้สังเกตสองคนไม่ว่าจะอยู่ที่ใดในกรอบอ้างอิงเดียวกันจะเห็นการกระจัดเดียวกัน

คราวนี้มาดูผู้สังเกตที่อยู่คนละกรอบอ้างอิงกันบ้าง ในหัวข้อ 9.1.1 นั้นสมมติมีนางสาวปูยืนอยู่บนถนน ถนนเป็นคนละกรอบอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงรถยนต์เพราะถนนไม่ได้เคลื่อนที่ แมลงวันที่เกาะนิ่งติดกับเพดานรถนั้นนายแดงซึ่งอยู่ในกรอบอ้างอิงรถยนต์บอกว่าการกระจัดของแมลงวันเป็นศูนย์ แต่นางสาวปูบอกว่าแมลงวันมีการกระจัดเพราะรถยนต์เคลื่อนที่ทำให้เวกเตอร์ตำแหน่งของแมลงวัน(อ้างอิงกับนางสาวปู)เปลี่ยนไป

การที่นางสาวปูและนายแดงเห็นการกระจัดของแมลงวันต่างกัน ทำให้ทั้งสองคนเห็นความเร็วและความเร่งของแมลงวันต่างกัน ดังจะกล่าวต่อไปในหัวข้อ 9.1.3 และ 9.1.4

9.1.3 ความเร็ว

ถ้าในช่วงเวลาสั้นๆ Δt อนุภาคตัวหนึ่งมีการกระจัด $\Delta\vec{r}$ นิยามของความเร็ว $\vec{v}$ คือการกระจัดหารด้วยเวลา โดยให้เวลาย่างเข้าสู่ศูนย์ คือ

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (9.1.3.1)$$

แต่ $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ เราเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $\frac{d\bar{r}}{dt}$ หรืออาจเขียนสั้นๆเป็น $\dot{\bar{r}}$

ดังนั้น $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \equiv \dot{\bar{r}}$ (9.1.3.2)

ในหัวข้อ 9.1.2 นักศึกษาได้เห็นแล้วว่าการกระจัดขึ้นกับกรอบอ้างอิง ดังนั้นความเร็วก็จะขึ้นกับกรอบอ้างอิงเช่นกัน

9.1.4 ความเร่ง

ถ้าในช่วงเวลาสั้นๆ Δt อนุภาคตัวหนึ่งมีความเร็วเปลี่ยนไป $\Delta \bar{v}$ นิยามของความเร่ง $\bar{a}$ คือความเร็วที่เปลี่ยนไปหารด้วยเวลา โดยให้เวลาย่างเข้าสู่ศูนย์ คือ

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \qquad (9.1.4.1)$$

คือ $$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\bar{r}} \qquad (9.1.4.2)$$

จากนิยามจะเห็นว่าทิศของความเร็วอยู่ในทิศเดียวกับทิศของ $\Delta \bar{v}$ <u>พึงระลึกว่าทิศของ $\Delta \bar{v}$ อาจเป็นคนละทิศกับทิศของ $\bar{v}$</u>

ในหัวข้อ 9.1.3 นักศึกษาได้เห็นแล้วว่าความเร็วขึ้นกับกรอบอ้างอิง ดังนั้นความเร่งก็จะขึ้นกับกรอบอ้างอิงเช่นกัน

ขอเน้นอีกครั้งว่าการกระจัด ความเร็วและความเร่งเป็นปริมาณที่ขึ้นกับกรอบอ้างอิง ผู้สังเกตที่อยู่คนละกรอบอ้างอิงจะเห็นการกระจัด ความเร็วและความเร่ง แตกต่างกัน ผู้สังเกตสองคนที่อยู่ในกรอบอ้างอิงเดียวกันจะเห็นการกระจัด ความเร็วและความเร่ง เหมือนกัน ดังนั้นสำหรับการกระจัด ความเร็วและความเร่ง ตำแหน่งของผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงไม่สำคัญ สำคัญที่ตัวกรอบอ้างอิง

ในทางกลับกันเวกเตอร์ตำแหน่งเป็นปริมาณที่ขึ้นตำแหน่งของผู้สังเกต(ขึ้นกับจุดกำเนิดหรือจุดอ้างอิง) ดังนั้นสำหรับปริมาณที่นิยามโดยใช้เวกเตอร์ตำแหน่ง นักศึกษาพึงระวังว่าปริมาณเหล่านี้จะเปลี่ยนถ้าเปลี่ยนจุดอ้างอิง ตัวอย่างเช่นทอร์ก(โมเมนต์ของแรง) $\bar{\tau}$ ที่กระทำต่อวัตถุ นิยามด้วย $\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$ เมื่อ $\bar{r}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของวัตถุ และ $\bar{F}$ คือแรงที่กระทำต่อวัตถุ ถ้าเปลี่ยนจุดอ้างอิง

ทอร์กก็จะเปลี่ยน หรืออีกตัวอย่างเช่นโมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L}$ ของวัตถุ นิยามด้วย $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ เมื่อ $\vec{P}$ คือโมเมนตัมเชิงเส้นของวัตถุ ถ้าเปลี่ยนจุดอ้างอิงโมเมนตัมเชิงมุมก็จะเปลี่ยน

9.1.5 พิกัดฉาก

บ่อยครั้งที่เราบรรยายปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ด้วยเวกเตอร์หรือการกระทำที่เกี่ยวกับเวกเตอร์(เช่น บวก ลบ ดอท ครอส เกรเดียนท์ ...) แต่เมื่อลงมือคำนวณเราจะใช้พิกัดช่วยในการคำนวณ พิกัดที่เรานำมาใช้มีหลายพิกัด เช่นพิกัดฉาก พิกัดทรงกระบอก พิกัดทรงกลม และพิกัดเชิงขั้วในระนาบ(ซึ่งเป็นกรณี 2 มิติของพิกัดทรงกระบอกและพิกัดทรงกลม) เราจะเลือกใช้พิกัดใดก็สุดแล้วแต่ว่าปัญหานั้นควรเลือกใช้พิกัดใด การเลือกใช้พิกัดที่เหมาะสมจะทำให้การคำนวณไม่ยุ่งยาก ในจำนวนพิกัดเหล่านี้พิกัดฉากเป็นพิกัดที่เรานำมาใช้อย่างกว้างขวางด้วยสมบัติเฉพาะตัวบางอย่างของมัน

9.1.5.1 เวกเตอร์หน่วยของพิกัดฉาก

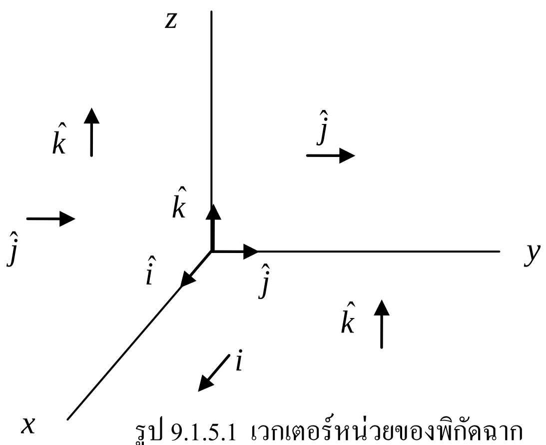
เวกเตอร์หน่วยของพิกัดฉากเรานิยมใช้สัญลักษณ์ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ซึ่งมีขนาดหนึ่งหน่วยโดยที่ตำแหน่งใดๆก็ตาม

$\hat{i}$ ชี้ไปในทิศที่ x เพิ่ม โดย y และ z คงที่

$\hat{j}$ ชี้ไปในทิศที่ y เพิ่ม โดย x และ z คงที่

$\hat{k}$ ชี้ไปในทิศที่ z เพิ่ม โดย x และ y คงที่

(ในช่วงที่ x หรือ y หรือ z เป็นลบนั้น ระลึกว่า ติดลบมาก< ติดลบน้อย ทำให้เวกเตอร์หน่วยชี้ไปทางเดิมเหมือนช่วงที่ x หรือ y หรือ z เป็นบวก)



รูป 9.1.5.1 เวกเตอร์หน่วยของพิกัดฉาก

พิกัดฉากที่นิยมใช้กันเรียกว่าพิกัดมือขวา ดังแสดงในรูป 9.1.5.1 (พิกัดมือซ้าย $+z$ จะชี้ลง)

พึงสังเกตว่าเวกเตอร์หน่วยของพิกัดฉากไม่ขึ้นกับตำแหน่ง คือในรูป 9.1.5.1 นั้น ไม่ว่าที่ตำแหน่งใด $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ มีขนาดหนึ่งหน่วยและชี้ทิศเดิมตลอด

สมมตินายแดงติดไปกับพิกัดฉากในรูป 9.1.5.1 และสมมติให้แมลงวันบิน เมื่อแมลงวันบินตำแหน่งของแมลงวันเปลี่ยนไปเมื่อเวลาเปลี่ยนไป แต่นายแดงเห็น $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ ไม่ขึ้นกับตำแหน่ง เพราะขนาดหนึ่งหน่วยเหมือนเดิม ทิศชี้ทิศเดิม ซึ่งก็คือนายแดงเห็น $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ ไม่ขึ้นกับเวลา ซึ่งถ้าเขียนบรรยายด้วยคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$$\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{\text{แดง}} = 0\,; \quad \left(\frac{d\,\hat{j}}{dt}\right)_{\text{แดง}} = 0\,; \quad \left(\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right)_{\text{แดง}} = 0\,; \qquad (9.1.5.1)$$

ขอเน้นว่าสมการ (9.1.5.1) เป็นจริงทั้งนั้น ไม่ว่าแกน xyz จะอยู่นิ่งหรือหกคะเมนตีลังกาอย่างไรก็ตาม อย่างไรก็ตามนักศึกษาพึงระลึกว่าที่เป็นเช่นนี้เพราะนายแดงตรึงติดกับแกน xyz ชุดนี้ สำหรับผู้สังเกตอื่นที่ไม่ได้ติดไปกับพิกัดฉากชุดนี้อาจเห็นทิศของเวกเตอร์หน่วยของพิกัดชุดนี้ไม่ชี้ทิศเดิม

การที่เวกเตอร์หน่วยไม่ขึ้นกับตำแหน่งนี้เป็นสมบัติเฉพาะของพิกัดฉากเท่านั้น สำหรับพิกัดอื่น ที่ตำแหน่งต่างกันแม้ขนาดของเวกเตอร์หน่วยจะเท่ากันคือหนึ่งหน่วย แต่ทิศอาจชี้ต่างกัน

9.1.5.2 องค์ประกอบของเวกเตอร์ในพิกัดฉาก

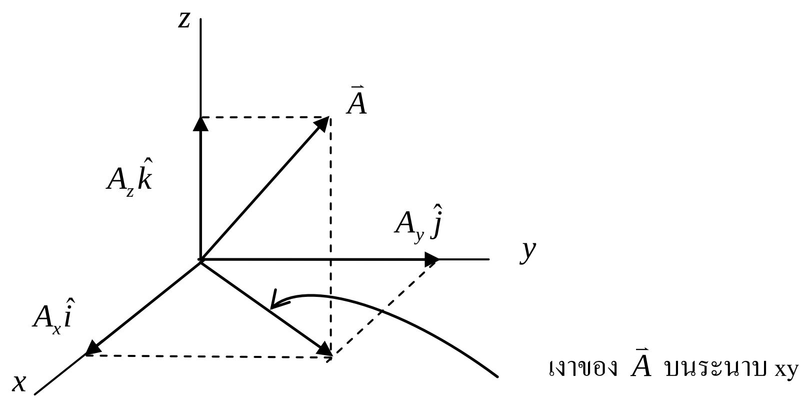
เวกเตอร์ $\vec{A}$ ใดๆ เมื่อเขียนให้อยู่ในองค์ประกอบของพิกัดฉาก xyz จะเขียนได้ว่า

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

หรือถ้าเขียนในพิกัดฉาก $x'y'z'$ ก็จะเขียนได้ว่า

$$\vec{A} = A_{x'}\hat{i}' + A_{y'}\hat{j}' + A_{z'}\hat{k}'$$

รูป 9.1.5.2 เป็นรูปองค์ประกอบของ $\vec{A}$ เมื่ออ้างอิงกับพิกัดฉาก xyz โดยบางทีเราพูดว่าแตกเวกเตอร์ $\vec{A}$ ให้อยู่ในแนวแกน x, y และ z ของพิกัดฉาก



รูป 9.1.5.2 การแตกเวกเตอร์ให้อยู่ในพิกัดฉาก นักศึกษาพึงระลึกว่า
พิกัดฉากในรูปนี้จะอยู่นิ่งหรือกำลังหกคะเมนตีลังกาไปกับรถยนต์ก็ได้
ณ เวลาหนึ่ง A_x, A_y และ A_z เป็นดังในรูป

เราเรียก $A_x\hat{i}$ ซึ่งมันเป็นเวกเตอร์อันหนึ่ง ว่าองค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในแนวแกน x

ส่วน $\underline{A_x}$ <u>ซึ่งเป็นสเกลาร์อันหนึ่ง</u> เราจะเรียกมันว่า<u>ขนาด</u>ขององค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในแนวแกน x

ในกรณีของ $A_y\hat{j}$ และ $A_z\hat{k}$ เราก็จะเรียกคล้ายๆกัน

9.1.6 บางมุมมองของอนุพันธ์เทียบกับเวลาของสเกลาร์และเวกเตอร์

ในเรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆตอนต่อไปคือตอนที่ 10 เกี่ยวข้องกับกรอบอ้างอิงสองกรอบ กรอบหนึ่งอยู่นิ่ง อีกกรอบหนึ่งเคลื่อนที่ ในที่นี้เราจึงจะกล่าวถึงอนุพันธ์เทียบกับเวลาเมื่ออ้างอิงกับกรอบอ้างอิงที่แตกต่างกัน

9.1.6.1 บางมุมมองของอนุพันธ์เทียบกับเวลาของสเกลาร์

สมมตินางสาวปูติดกับจุดกำเนิด O ของกรอบ xyz ที่อยู่นิ่ง ส่วนนายแดงติดกับจุดกำเนิด O' ของกรอบ $x'y'z'$ โดยกรอบ $x'y'z'$ เป็นกรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ จะเคลื่อนที่อย่างไรก็ได้ หกคะเมนตีลังกาอย่างไรได้ทั้งนั้น แต่ความเร็วของนายแดงต้องไม่มากนักเมื่อเทียบกับความเร็วแสงเพราะ<u>เราจะไม่สนใจผลของสัมพัทธภาพ ในหัวข้ออื่นๆก็เช่นกันคือเราจะไม่สนใจผลของสัมพัทธภาพ</u>

สมมติมีโอ่งน้ำใบหนึ่งรับน้ำจากก๊อกน้ำประปา ปริมาตรของน้ำในโอ่งไม่คงที่เพราะมีน้ำไหลจากก๊อกมาเพิ่มเรื่อยๆ

ณ เวลาหนึ่ง ถ้านางสาวปูซึ่งอยู่ที่แกน xyz สังเกตเห็นโอ่งมีน้ำ 10 ลิตร นายแดงซึ่งอยู่ที่แกน $x'y'z'$ ก็จะเห็นโอ่งมีน้ำ 10 ลิตร เช่นกัน จะเห็นเป็นอย่างอื่นเช่น 9.8 ลิตร หรือ 11 ลิตร ไม่ได้

ณ อีกเวลาหนึ่ง ถ้านางสาวปูสังเกตเห็นโอ่งมีน้ำ 10.002 ลิตร นายแดงก็ต้องเห็นโอ่งมีน้ำ 10.002 ลิตร เช่นกัน

ถ้าให้ V คือปริมาตรของน้ำในโอ่ง ในช่วงเวลา Δt ช่วงหนึ่ง ปริมาตรน้ำที่เปลี่ยนไป สังเกตโดยนางสาวปูและนายแดงจะเท่ากัน คือ

$$(\Delta V)_{\text{ปู}} = (\Delta V)_{\text{แดง}} \qquad (9.1.6.1)$$

หารสมการ(9.1.6.1) ด้วย Δt แล้วให้ลิมิตของ Δt ย่างเข้าสู่ศูนย์

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta V)_{\text{ปู}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta V)_{\text{แดง}}}{\Delta t} \qquad (9.1.6.2)$$

ซึ่งเขียนสั้นๆได้ เป็น $$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{ปู}} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{\text{แดง}} \qquad (9.1.6.3)$$

พูดเป็นคำพูดคือ นางสาวปูและนายแดงเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรน้ำ เท่ากัน

ปริมาตรน้ำ V เป็นสเกลาร์อันหนึ่ง นักศึกษาลองนึกดูจะเห็นว่าอนุพันธ์เทียบกับเวลาของสเกลาร์ใดๆก็ตาม ไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิง

คราวนี้มาดูเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}$ ความเร็ว $\vec{v}$ ซึ่งอ้างอิงกับกรอบ xyz เราเขียนได้ว่า

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \equiv \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\,\hat{k}$$

ทั้ง $x, y, z, v_x, v_y, v_z, \dot{x}, \dot{y}$ และ $\dot{z}$ ล้วนแล้วแต่เป็นสเกลาร์ ดังนั้นอนุพันธ์เทียบกับเวลาของปริมาณเหล่านี้จึงไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิง คือไม่ว่าผู้สังเกตจะอยู่กรอบอ้างอิงไหนก็จะเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณเหล่านี้เท่ากัน

ถ้ามีกรอบสองกรอบคือ xyz และ $x'y'z'$ จะได้ว่า

$$\left(\frac{d\,x}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\,x}{dt}\right)_{O'} \quad ; \quad \left(\frac{d\,\dot{x}}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\,\dot{x}}{dt}\right)_{O'} \; ; \ldots$$

เมื่อ $\left(\frac{d}{dt}\right)_O$ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงสังเกตโดยผู้สังเกตในกรอบ xyz

$\left(\frac{d}{dt}\right)_{O'}$ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงสังเกตโดยผู้สังเกตในกรอบ $x'y'z'$

ทำนองเดียวกัน ในกรณีเวกเตอร์ตำแหน่งและความเร็วที่เขียนในพิกัด $x'y'z'$ คือ

$$\vec{r}\,' = x'\,\hat{i}' + y'\,\hat{j}' + z'\hat{k}'$$

$$\vec{v}\,' = v_{x'}\hat{i}' + v_{y'}\hat{j}' + v_{z'}\hat{k}' \equiv \dot{x}'\,\hat{i}' + \dot{y}'\,\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}'$$

ก็จะได้ว่า $$\left(\frac{d\,x'}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\,x'}{dt}\right)_{O'} \quad ; \quad \left(\frac{d\,\dot{x}'}{dt}\right)_O = \left(\frac{d\,\dot{x}'}{dt}\right)_{O'} \; ; \ldots$$

ปกติแล้วอนุพันธ์เทียบกับเวลาเราจะใช้ “จุด” ดังนั้นถ้าเห็น “จุด” อยู่บนสเกลาร์ นักศึกษาบอกได้เลยว่ามันไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิง ตัวอย่างเช่น $\dot{v}_x \equiv \ddot{x}$ ไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิง

9.1.6.2 บางมุมมองของอนุพันธ์เทียบกับเวลาของเวกเตอร์

เวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีขนาดและทิศ ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงหนึ่งอาจเห็นทิศของเวกเตอร์ไม่เปลี่ยน แต่ผู้สังเกตในอีกกรอบอ้างอิงหนึ่งอาจเห็นทิศเปลี่ยน ดังนั้นนักศึกษาพึงระลึกว่าอนุพันธ์เทียบกับเวลาของเวกเตอร์ขึ้นกับกรอบอ้างอิง

ตัวอย่างเช่น ถ้า $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ เวกเตอร์หนึ่ง

$$\left(\frac{d\,\bar{A}}{dt}\right)_O \neq \left(\frac{d\,\bar{A}}{dt}\right)_{O'}$$

อย่างไรก็ตามเรามักไม่ระบุกรอบอ้างอิงในการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาของเวกเตอร์ โดยถือว่าเป็นที่เข้าใจกันว่าเป็นอนุพันธ์ที่อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงที่เราใช้ในขณะนั้นซึ่งมักเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย ยกเว้นในกรณีที่มีการเปรียบเทียบกันระหว่างกรอบอ้างอิงสองกรอบอ้างอิง เราจึงจะระบุให้แน่ชัดว่าเป็นอนุพันธ์เทียบกับเวลาของกรอบอ้างอิงใด ดังที่นักศึกษาจะได้เห็นในเรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอนที่10

เรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอนที่ 9.2 กรอบอ้างอิงเฉื่อย กฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่ง แรงจริงและกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สาม

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล

มกราคม 2565

ในตอนที่ 9.1 เราได้เห็นแล้วว่าการกระจัด ความเร็ว และความเร่ง ขึ้นอยู่กับกรอบอ้างอิงของผู้สังเกต มีกรอบอ้างอิงชนิดหนึ่งที่มีความสำคัญมากในเรื่องกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน กรอบอ้างอิงชนิดนี้เรียกว่ากรอบอ้างอิงเฉื่อย

9.2.1 กรอบอ้างอิงเฉื่อย(inertial frame)

กรอบอ้างอิงเฉื่อยคือ "กรอบอ้างอิงที่ไม่มีความเร่ง" แต่เรารู้กันมาแล้วในหัวข้อ 9.1.4 ว่าความเร่งขึ้นกับว่าผู้สังเกตอยู่ในกรอบอ้างอิงใด ดังนั้นจึงมีคำถามว่าผู้สังเกตที่สังเกตเห็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยไม่มีความเร่งนี้ เขาอยู่ที่ใด ?

คำตอบมันจะเป็นคำตอบที่ไม่ชัดเจน เพื่อที่จะข้ามคำถามนี้นิวตันจึงบอกว่าผู้สังเกตที่สังเกตเห็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยไม่มีความเร่ง อยู่ที่ "ดาวคงที่" (fixed star) ดาวนี้อยู่ที่ไหนก็ไม่รู้ แต่ที่เรารู้ก็คือมันจะมีหรือไม่มีก็ไม่สำคัญเพราะในทางปฏิบัติสำหรับปัญหาโดยทั่วไปที่การหมุนของโลกมีผลน้อยมากเช่นการไถลของกล่องบนพื้นเอียง หรือการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ของก้อนหินเมื่อเราขว้างก้อนหินไปในอากาศ เราถือได้ว่าผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยแม้ผิวโลกจะมีความเร่งเพราะโลกหมุน ทั้งนี้เพราะเราได้คำตอบที่มีความผิดพลาดที่ยอมรับได้ อย่างไรก็ตามถ้าเป็นปัญหาที่ต้องคำนึงถึงผลของการหมุนของโลกเช่นการยิงปืนใหญ่ ซึ่งความเร็วของลูกปืนมีค่ามากและเคลื่อนที่เป็นระยะทางหลายสิบกิโลเมตร เราจะไม่ถือว่าผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย

9.2.2 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่ง

กฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่งกล่าวว่า "วัตถุจะอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ในแนวตรงนอกจากจะมีแรงลัพธ์ซึ่งมีค่าไม่เป็นศูนย์กระทำต่อวัตถุนั้น"

การตีความกฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่งมี 2 อย่างคือ

อย่างแรกในสมัยของนิวตันนั้นมีความเชื่อว่าการที่วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ได้ต้องมีแรงกระทำซึ่งเป็นความเข้าใจที่ผิด เพราะถ้าเดิมวัตถุเคลื่อนที่ แม้ไม่มีแรงกระทำมันก็จะเคลื่อนที่ไปเรื่อยๆเป็นเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่ จึงเป็นไปได้ว่านิวตันตั้งกฎข้อนี้เพื่อเป็นการล้มล้างความเชื่ออันเก่า (ด้วยเหตุนี้บางทีเรียกกฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่งว่ากฎของความเฉื่อย)

การตีความอย่างที่สองคือมีกรอบอ้างอิงชนิดหนึ่งที่เรียกว่า “กรอบอ้างอิงเฉื่อย” ซึ่งถ้าผู้สังเกตอยู่ในกรอบอ้างอิงชนิดนี้แล้ว กฎการเคลื่อนที่จะเป็นจริง

เพื่อให้นักศึกษาตระหนักถึงความสำคัญของกรอบอ้างอิงเฉื่อย พิจารณาปากกาหรืออะไรก็ได้ที่วางนิ่งบนโต๊ะ คือไม่มีแรงที่ผิวโต๊ะกระทำต่อปากกาในแนวขนานกับผิวโต๊ะ จากนั้นตัวเราขยับถอยหลังสมมติว่าด้วยความเร่ง 1 เมตร/วินาที^{2} เราจะเห็นปากกามีความเร่ง1 เมตร/วินาที^{2} ทิศตรงข้ามกับความเร่งของเราทำให้เราคิดผิดๆว่าแม้ไม่มีแรงกระทำต่อวัตถุ วัตถุก็มีความเร่งได้ หรืออาจคิดผิดๆว่ามีแรงที่ผิวโต๊ะกระทำต่อปากกาทิศเดียวกับความเร่งของปากกา คือในแนวขนานกับผิวโต๊ะ ทั้งที่จริงๆแล้วไม่มีแรงกระทำต่อปากกาในแนวขนานกับผิวโต๊ะ ที่เราคิดผิดๆเพราะเราไม่ได้อยู่ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย

9.2.3 แรงจริงและการวิเคราะห์หาแรงจริงที่กระทำต่อวัตถุ

9.2.3.1 แรงจริง(real force)

แรงจริงเป็นแรงที่สามารถระบุตัวผู้ออกแรงได้ ตัวอย่างเช่นแรงที่มือผลักผนัง มือเป็นผู้ออกแรง แรงที่ผนังผลักมือ ผนังเป็นผู้ออกแรง แรงที่เชือกดึงก้อนหิน เชือกเป็นผู้ออกแรง แรงที่ก้อนหินดึงเชือก ก้อนหินเป็นผู้ออกแรง แรงที่โลกดึงดูดดวงจันทร์ โลกเป็นผู้ออกแรง แรงที่ดวงจันทร์ดึงดูดโลก ดวงจันทร์เป็นผู้ออกแรง เป็นต้น

มีแรงอีกชนิดหนึ่งซึ่งเกิดจากความรู้สึกของผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง เราเรียกว่า “แรงเทียม” (fictitious force) แรงเทียมที่ทำให้นักเรียนนักศึกษาเข้าใจผิดมากที่สุดคือ“แรงหนีศูนย์กลาง” ในเรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆตอนที่ 9 นี้ เราจะเขียนกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองโดยใช้กรอบอ้างอิงเฉื่อยซึ่งแรงที่กระทำต่อวัตถุต้องเป็นแรงจริงเท่านั้น ส่วนในตอนที่ 10 ซึ่งเป็นตอนที่เราดัดแปลงกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเพื่อใช้กับกรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง แรงที่ทำต่อวัตถุจะมีทั้งแรงจริงและแรงเทียม

เพื่อประโยชน์ในการวิเคราะห์แรงจริงที่กระทำต่อวัตถุ เราอาจแบ่งแรงจริงออกเป็น 2 ประเภท

ประเภทแรกเป็นประเภทที่ต้องสัมผัสกับวัตถุจึงจะออกแรงกระทำต่อวัตถุได้ ตัวอย่างเช่นแรงจากมือ ถ้าเราจะใช้มือผลักผนังเราต้องให้มือสัมผัสกับผนัง ถ้าจะใช้เชือกดึงก้อนหินก็ต้องให้เชือกสัมผัสกับก้อนหิน เป็นต้น

ประเภทที่สองเป็นประเภทที่ไม่ต้องสัมผัสกับวัตถุก็ออกแรงกระทำต่อวัตถุได้ ตัวอย่างเช่นแรงที่โลกดึงดูดดวงจันทร์ โลกไม่ต้องสัมผัสกับดวงจันทร์ก็ออกแรงกระทำต่อดวงจันทร์ได้ แรงระหว่างประจุไฟฟ้า ประจุไม่ต้องสัมผัสกันก็ออกแรงกระทำต่อกันได้ แรงที่สนามแม่เหล็กกระทำต่อประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กไม่ต้องสัมผัสกับประจุไฟฟ้าก็ออกแรงกระทำต่อประจุไฟฟ้าได้ เป็นต้น

ข้อเสนอแนะ เมื่อนักศึกษาครูไปเป็นครู ควรให้นักเรียนเรียนรู้ด้วยการลองทำ เช่นให้นักเรียนพยายามผลักผนังโดยยืนห่างผนังไม่ให้มือสัมผัสผนังได้ นักเรียนจะบอกได้ทันทีว่ามันเป็นไปไม่ได้ หรือลองพยายามใช้เส้นด้ายดึงกล่องโดยไม่ให้สัมผัสกล่อง นักเรียนจะบอกได้ทันทีว่ามันเป็นไปไม่ได้

ข้อเสนอแนะนี้ดูเหมือนเป็นเรื่องตลก เพราะดูเหมือนใครๆก็น่าจะรู้ แต่จริงๆกลับไม่ใช่เช่นนั้น ผมเคยเล่าไว้ในเรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆตอนที่ 1 เขียนในปี พ.ศ. 2555 ว่า มีคนคิดว่าในการเตะลูกฟุตบอล ขณะที่ลูกฟุตบอลลอยอยู่ในอากาศ ยังมีแรงจากเท้ากระทำต่อลูกฟุตบอล ซึ่งมันเป็นไปไม่ได้ เพราะเท้าไม่ได้สัมผัสกับลูกฟุตบอลแล้ว ปัจจุบันก็ยังมีนักศึกษาที่เข้าใจผิด

9.2.3.2 การวิเคราะห์หาแรงจริงที่กระทำต่อวัตถุ

การวิเคราะห์หาแรงจริงที่กระทำต่อวัตถุก็คือการดูว่ามีแรงจริงอะไรบ้างที่กระทำต่อวัตถุ การวิเคราะห์หาแรงจริงทำได้ง่ายมากจากสองขั้นตอนดังต่อไปนี้

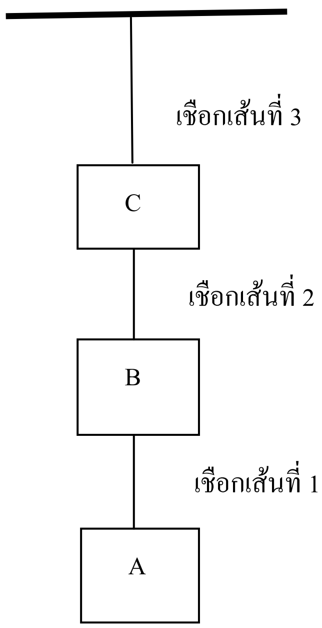
ขั้นตอนแรก ดูว่าวัตถุสัมผัสกับสิ่งใด สิ่งนั้นจะออกแรงประเภทที่ต้องสัมผัสกระทำต่อวัตถุได้

สิ่งที่นักศึกษาควรระลึกคือปกติแล้ววัตถุจะสัมผัสกับอากาศ โดยวัตถุมักจะจมอยู่ในอากาศ วัตถุจึงมีแรงลอยตัวเนื่องจากวัตถุจมอยู่ในอากาศ (คล้ายๆก้อนหินจมในน้ำ) แต่ปัญหาส่วนใหญ่เราไม่ต้องคำนึงถึงแรงนี้ นอกจากนี้ถ้าวัตถุเคลื่อนที่จะมีแรงต้านจากอากาศแต่ปัญหาในระดับมัธยมก็จะไม่คำนึงถึงแรงต้านนี้เช่นกัน

<u>ขั้นตอนที่สอง</u> ดูว่ามีแรงประเภทที่ไม่ต้องสัมผัสอะไรบ้างที่กระทำต่อวัตถุ สำหรับปัญหาทางกลศาสตร์มักเป็นแรงโน้มถ่วง

สองขั้นตอนที่กล่าวไปแล้วนี้จะทำให้นักศึกษาไม่หลงทางในการวิเคราะห์แรง

ตัวอย่างที่ 9.2.3.1 กล่องสามกล่อง A , B และ C มวล m_A, m_B และ m_C ตามลำดับ โยงด้วยเชือก 3 เส้นติดกับเพดานดังรูป ต.ย.9.2.3.1



รูป ต.ย.9.2.3.1

1) มีแรง(จริง)อะไรทำต่อ A บ้าง

<u>ขั้นตอนที่หนึ่ง</u> จะเห็นว่า A แตะ(สัมผัส)กับเชือกเส้นที่ 1 ดังนั้นเชือกเส้นที่1 ออกแรงกระทำต่อ A ณ ตำแหน่งที่แตะ (เป็นแรงดึงขึ้น)

<u>ขั้นตอนที่สอง</u> แรงที่ไม่ต้องสัมผัสคือแรงดึงดูดจากโลก ขนาด $m_A g$ มีทิศลงในแนวดิ่ง

ก็คือมีแรงจริง 2 แรงกระทำต่อกล่อง A

เราจะลองตั้งคำถามและตอบคำถามดู เพื่อว่าเมื่อนักศึกษาไปเป็นครูจะได้นำไปถามนักเรียน

เพดานออกแรงกระทำต่อกล่อง A ได้หรือไม่ ? (ไม่ได้) เพราะอะไร? (เพราะเพดานไม่ได้สัมผัสกล่อง A มันจึงออกแรงกระทำต่อกล่อง A ไม่ได้)

เชือกเส้นที่สองออกแรงกระทำต่อกล่อง A ได้หรือไม่ ? (ไม่ได้) เพราะอะไร? (เพราะเชือกเส้นที่ 2 ไม่ได้สัมผัสกล่อง A มันจึงออกแรงกระทำต่อกล่อง A ไม่ได้)

กล่อง B ออกแรงกระทำต่อกล่อง A ได้หรือไม่ ? (ไม่ได้) เพราะอะไร? (เพราะกล่อง B ไม่ได้สัมผัสกล่อง A มันจึงออกแรงกระทำต่อกล่อง A ไม่ได้)

<u>หมายเหตุ</u> จริงๆแล้วกล่อง B ดึงดูดกล่อง A ด้วยแรงดึงดูดระหว่างมวล แต่มันมีค่าน้อยมาก(เมื่อเทียบกับแรงจากเชือกเส้นที่ 1 และแรงดึงดูดจากโลก) จนเราไม่คำนึงถึง

2) มีแรง(จริง)อะไรทำต่อ B บ้าง

<u>ขั้นตอนที่หนึ่ง</u> จะเห็นว่า B สัมผัสกับเชือกเส้นที่ 1 และเชือกเส้นที่ 2 ดังนั้นเชือกเส้นที่1 ออกแรงกระทำต่อ B ณ ตำแหน่งที่แตะ (เป็นแรงดึงลง) ส่วนเชือกเส้นที่ 2 ออกแรงกระทำต่อ B ณ ตำแหน่งที่แตะ (เป็นแรงดึงขึ้น)

<u>ขั้นตอนที่สอง</u> แรงที่ไม่ต้องสัมผัสคือแรงดึงดูดจากโลก ขนาด $m_B g$ มีทิศลงในแนวดิ่ง

ก็คือมีแรงจริง 3 แรงกระทำต่อกล่อง B

ต่อไปเป็นคำถามและคำตอบ เผื่อว่าเมื่อนักศึกษาไปเป็นครูจะได้นำไปถามนักเรียน

เพดานออกแรงกระทำต่อกล่อง B ได้หรือไม่ ? (ไม่ได้) เพราะอะไร? (เพราะเพดานไม่ได้สัมผัสกล่อง B มันจึงออกแรงกระทำต่อกล่อง B ไม่ได้)

เชือกเส้นที่ 3 ออกแรงกระทำต่อกล่อง B ได้หรือไม่ ? (ไม่ได้) เพราะอะไร? (เพราะเชือกเส้นที่ 3 ไม่ได้สัมผัสกล่อง B มันจึงออกแรงกระทำต่อกล่อง B ไม่ได้)

กล่อง C ออกแรงกระทำต่อกล่อง B ได้หรือไม่ ? (ไม่ได้) เพราะอะไร? (เพราะกล่อง C ไม่ได้สัมผัสกล่อง B มันจึงออกแรงกระทำต่อกล่อง B ไม่ได้)

9.2.4 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สาม

กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สามกล่าวว่า “ทุกแรงกิริยา ย่อมมีแรงปฏิกิริยาซึ่งมีขนาดเท่ากันแต่มีทิศตรงข้ามกันเสมอ” หรือมักกล่าวกันสั้นๆว่า “action เท่ากับ reaction”

แรงใดจะเป็นแรงกิริยาหรือปฏิกิริยาขึ้นกับว่าเราดูอะไรเป็นระบบ(คือเราสนใจอะไร) ตัวอย่างเช่น โลกกับดวงจันทร์ดึงดูดกัน ถ้าเราดูโลกเป็นระบบแรงที่ดวงจันทร์ดูดโลกเป็นแรงกิริยา แรงที่โลกดูดดวงจันทร์เป็นแรงปฏิกิริยา   แต่ถ้าเราดูดวงจันทร์เป็นระบบแรงที่ดวงจันทร์ดูดโลกเป็นแรงปฏิกิริยา แรงที่โลกดูดดวงจันทร์เป็นแรงกิริยา

ตัวอย่างของกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สามเช่น ถ้าเราใช้ค้อนตีนุ่น แรงที่ค้อนทำต่อนุ่นจะมีขนาดเท่ากับแรงที่นุ่นทำต่อค้อน

แรงที่โลกดึงดูดเม็ดฝุ่นจะมีขนาดเท่ากับแรงที่เม็ดฝุ่นดึงดูดโลก เป็นต้น

กฎข้อที่สามเป็นจริงเฉพาะแรงจริงเท่านั้น ไม่เป็นจริงสำหรับแรงเทียม ตัวอย่างเช่นแรง(เทียม)หนีศูนย์กลางจะไม่มีแรงปฏิกิริยาที่คู่กับมัน

เรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอนที่ 9.3 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองกรณีอนุภาค

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล

มกราคม 2565

ในตอนที่ 9.3 นี้ จะกล่าวถึงกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองสำหรับอนุภาคตัวเดียว คำว่า "อนุภาค" เราหมายถึงวัตถุที่มีความกว้าง ความยาว ความสูงน้อยมาก คือเป็นจุด แต่มีมวล ส่วนคำว่า "วัตถุ" เราหมายถึงวัตถุที่มีความกว้าง ความยาว ความสูง อย่างไรก็ตามคำว่า"วัตถุ" ในหัวข้อ 9.3 นี้เป็นวัตถุที่เราพิจารณาเป็นอนุภาคได้ เพราะเป็นวัตถุที่ทุกๆตำแหน่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วและความเร่งเดียวกัน ตัวอย่างเช่นกล่องไถลลงมาตามพื้นเอียง ทุกๆตำแหน่งในกล่องมีความเร็วและความเร่งเดียวกัน เราจึงมองมันคล้ายกับเป็นอนุภาคได้ แต่ที่ใช้คำว่า"วัตถุ" ไม่ใช้คำว่า "อนุภาค" ให้ชัดเจนไปเลยเพราะต่อไปต้องการให้นักศึกษาแยกแยะเองว่าต้องคำนึงถึงรูปร่างของ "วัตถุ" หรือไม่

กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันกรณีอนุภาคเขียนสั้นๆได้ว่า

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad (9.3)$$

คือ แรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุ เท่ากับมวลคูณด้วยความเร่งของวัตถุ

สิ่งที่เราต้องระลึกคือแรงทางด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับนั้นต้องเป็นแรงจริง

และความเร่งทางด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับนั้นต้องอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย

9.3.1 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเชิงปฏิบัติแบบมาตรฐาน

ในการใช้งานจริงมักเขียนสมการ(9.3) ให้อยู่ในแนวที่ตั้งฉากกันสองหรือสามแนว ส่วนมากมักเป็นแนว x, y และ z ของพิกัดฉาก ทำให้เขียนสมการ(9.3) ในแต่ละแนวได้เป็น

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \qquad (9.3.1.1)$$

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \qquad (9.3.1.2)$$

$$\sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z \qquad (9.3.1.3)$$

การเขียนแรงและความเร่งให้อยู่ในองค์ประกอบของพิกัดฉากนี้มันมีความเหมาะเจาะ (ความเหมาะเจาะของพิกัดฉากนักศึกษาดูได้ในเรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอนที่8) มันเหมาะเจาะเสียจนไม่ค่อยมีใครตั้งคำถามเกี่ยวกับตัวมัน ไม่ว่าปัญหาจะซับซ้อนอย่างไรเมื่อเริ่มแก้ปัญหาโดยใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเราก็มักสร้างพิกัดฉากขึ้นมาแล้วมันก็แก้ปัญหาได้ ผมจึงเรียกสมการ (9.3.1.1) (9.3.1.2) และ (9.3.1.3) ว่า กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเชิงปฏิบัติแบบมาตรฐาน

กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเชิงปฏิบัติแบบมาตรฐานแม้ใช้งานได้ดี แต่มันดีจนทำให้ขาดความเข้าใจในบางประเด็น เช่นครูผู้สอนบางคนที่ไม่ใช้แนวที่ตั้งฉากกันในการเขียนแรงและความเร่งเขารู้จากประสบการณ์ว่า สำหรับวัตถุชิ้นหนึ่งเขา(มัก)ใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเขียนสมการได้ไม่เกิน 2 สมการ ถ้าสมการยังไม่พอเขาจะเปลี่ยนเป็นพิจารณาวัตถุชิ้นใหม่ ถ้ายังขืนใช้วัตถุชิ้นเดิมอยู่เขาจะไม่ได้คำตอบ แต่ครูเหล่านี้(น่าจะ)ไม่รู้เหตุผลว่าทำไม

โจทย์ในระดับมัธยมปลายจำนวนมากไม่จำเป็นต้องเขียนแรงและความเร่งให้อยู่ในองค์ประกอบของพิกัดฉาก แต่จะใช้แนวใดก็แล้วแต่สะดวก ผมจึงเรียกว่า “กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเชิงปฏิบัติแบบตามสะดวก ” ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อ 9.3.3 แต่เพื่อความเข้าใจจะพูดถึงสมการเชิงเส้นก่อนในหัวข้อ 9.3.2

9.3.2 สมการเชิงเส้น

สมการเชิงเส้น คือสมการที่แต่ละพจน์มีเพียงค่าคงตัว หรือเป็นผลคูณระหว่างค่าคงตัวกับตัวแปรยกกำลังหนึ่ง

สมการ(9.3) นั้น ในการใช้เชิงปฏิบัติ(เช่นการทำโจทย์) เราจะใช้ในรูปขององค์ประกอบของเวกเตอร์ในแนวที่เหมาะสม โดยในแต่ละแนวจะให้สมการเชิงเส้นออกมาหนึ่งสมการ สมการเชิงเส้นเหล่านี้อาจเป็นอิสระหรือไม่เป็นอิสระต่อกันก็ได้ เราจึงจะกล่าวถึงสมการเชิงเส้นในแง่ของความเป็นอิสระหรือไม่เป็นอิสระต่อกัน

ถ้ามีสมการเชิงเส้นหลายสมการ เรากล่าวสมการเหล่านี้เป็นอิสระต่อกันถ้าเราไม่สามารถหาสมการหนึ่งจากผลรวมเชิงเส้น(linear combination) ของสมการอื่น โดยผลรวมเชิงเส้นคือการคูณด้วยค่าคงตัวบวกหรือลบสมการ เป็นต้น

ตัวอย่างเช่น $3x + 2y = 7$ (9.3.2.1)

$$x+5y=11 \qquad (9.3.2.2)$$

เรากล่าวว่าสมการ(9.3.2.1) และ (9.3.2.2) เป็นอิสระต่อกัน เพราะเราไม่อาจหาสมการหนึ่งได้จากอีกสมการหนึ่ง เช่นถ้าคูณสมการ(9.3.2.2) ด้วย 3 ก็ออกมาเป็น $3x+15y=33$ ซึ่งไม่ใช่สมการ (9.3.2.1)

แต่สมการ $5x-y=10$ (9.3.2.3)

และ $10x-2y=20$ (9.3.2.4)

สมการทั้งสองไม่เป็นอิสระต่อกัน เพราะสมการ(9.3.2.4) ได้มาจากเอาเลข 2 คูณสมการ (9.3.2.3)

ในวิชาฟิสิกส์เรามักพูดว่า สมการ (9.3.2.3) และ(9.3.2.4) หาคำตอบไม่ได้ (คณิตศาสตร์จะบอกว่ามีคำตอบมากมาย แต่ฟิสิกส์บอกว่าไม่มีคำตอบเพราะคำตอบในทางฟิสิกส์คือคำตอบที่ unique)

ถ้าเรามีสมการเชิงเส้นที่เป็นอิสระต่อกันสองสมการ มีตัวไม่รู้ค่าสองตัว เราสามารถหาตัวไม่รู้ค่าได้ เช่นสมการ (9.3.2.1) และ (9.3.2.2) ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน ถ้าแก้สมการจะได้ $x=1$ และ $y=2$

ข่าวสารที่อยู่ในสมการ(9.3.2.1) จะต่างกับข่าวสารที่อยู่ในสมการ (9.3.2.2) เราจึงสามารถใช้สมการทั้งสองหาตัวไม่รู้ค่า x และ y ได้ หรือก็คือสมการที่เป็นอิสระต่อกันมีข่าวสารที่แตกต่างกัน

ถ้าเรามีสมการเชิงเส้นที่เป็นอิสระต่อกันสามสมการ มีตัวไม่รู้ค่าสามตัว เราสามารถหาตัวไม่รู้ค่าได้

ตัวอย่างเช่น $x+y+z=6$ (9.3.2.5)

$2x+2y-z=3$ (9.3.2.6)

$3x+5y-2z=7$ (9.3.2.7)

สมการ(9.3.2.5) (9.3.2.6) และ(9.3.2.7) เป็นสมการที่เป็นอิสระต่อกัน แก้สมการได้ $x=1$, $y=2$ และ $z=3$

คราวนี้ดูสมการ $x+2y-3z=10$ (9.3.2.8)

$3x+2y-3z=15$ (9.3.2.9)

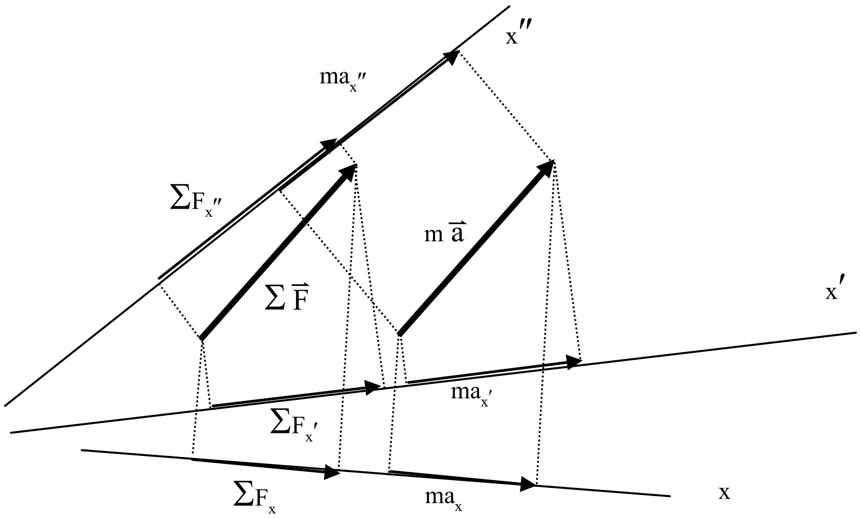
$$6x+8y-12z=45 \qquad (9.3.2.10)$$

สมการ (9.3.2.10) ได้มาจากการเอาเลข 3 คูณสมการ(9.3.2.8) แล้วบวกกับสมการ(9.3.2.9) ดังนั้น สมการทั้งสามไม่เป็นอิสระต่อกัน ก็คือการเขียนสมการ(9.3.2.10) เพิ่มขึ้นมา ไม่ได้มีข่าวสารใหม่เพิ่มเติมไปจากสมการ (9.3.2.8) และ (9.3.2.9) ถ้านักศึกษาลองแก้สมการ(9.3.2.8)(9.3.2.9)(9.3.2.10) ดู จะเห็นว่ามันไม่มีคำตอบ

9.3.3 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเชิงปฏิบัติแบบตามสะดวก

เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนเราจะพิจารณาองค์ประกอบของแรงลัพธ์และความเร่งในระนาบของกระดาษ ซึ่งเป็นปัญหาใน 2 มิติ อย่างไรก็ตามเราสามารถขยายเป็นปัญหาใน 3 มิติ (ในปริภูมิ) ได้โดยง่าย

สมมติว่ามีวัตถุชิ้นหนึ่งมวล m ถูกแรงหลายแรงกระทำ โดยแรงลัพธ์คือ $\sum \vec{F}$ ทำให้วัตถุนี้มีความเร่ง $\vec{a}$



รูป 9.3.3.1

ให้ x, x', x'' เป็นแนวใดๆสามแนว คำว่าแนวในที่นี้หมายถึงเส้นตรงเส้นหนึ่ง(เส้นตรงที่ขนานกันถือว่าเป็นแนวเดียวกัน) เนื่องจากองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแนวใด หมายถึงเงาของเวกเตอร์ในแนวนั้น ดังนั้นองค์ประกอบของ $\sum \vec{F}$ และ $m\vec{a}$ ในแนว x, x', x'' คือ $\sum \vec{F}_x$, $\sum \vec{F}_{x'}$, $\sum \vec{F}_{x''}$ และ $m\vec{a}_x$, $m\vec{a}_{x'}$, $m\vec{a}_{x''}$ แสดงดังรูป 9.3.3.1

เนื่องจาก $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

คือ $\sum \vec{F}$ และ $m\vec{a}$ เท่ากันทั้งขนาดและทิศทาง

ดังนั้น ถ้าดูในแนว x จะได้ว่า $\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$ (9.3.3.1)

ถ้าดูในแนว x' จะได้ว่า $\sum \vec{F}_{x'} = m\vec{a}_{x'}$ (9.3.3.2)

ถ้าดูในแนว x'' จะได้ว่า $\sum \vec{F}_{x''} = m\vec{a}_{x''}$ (9.3.3.3)

(ถ้านักศึกษามองรูป 9.3.3.1 ไม่ออก ให้เลื่อน $\sum \vec{F}$ ไปทับ $m\vec{a}$ หรือเลื่อน $m\vec{a}$ ไปทับ $\sum \vec{F}$ ก็ได้ มันจะทับกันพอดี ดังนั้นองค์ประกอบของ $\sum \vec{F}$ และ $m\vec{a}$ ไม่ว่าจะเป็นแนวใดจึงเท่ากัน)

ในสมการ(9.3.3.1) (9.3.3.2) และ (9.3.3.3) นั้น แนว x, x' และ x'' ไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกัน

นอกจาก 3 แนวนี้แล้วยังมีแนวอื่นๆอีกนับไม่ถ้วนแนวที่เราสามารถเขียนสมการออกมาคล้ายๆกับสมการ (9.3.3.1) (9.3.3.2) และ (9.3.3.3)

ในระดับมัธยมปัญหาจะเป็นปัญหาที่ความเร่งคงที่ ดังนั้นจากแต่ละแนวเราเขียนสมการเชิงเส้นได้หนึ่งสมการ แม้ว่าแนวที่เราสามารถเขียนสมการมีจำนวนนับไม่ถ้วนแนว แต่ถ้าเราเลือกแนวใดขึ้นมาแล้ว จะเลือกแนวที่สอง(แนวใดก็ได้)ได้อีกหนึ่งแนวเท่านั้นที่จะให้สมการที่เป็นอิสระกับแนวแรก โดยถ้าเราเขียนสมการจากแนวที่สาม สมการจากแนวที่สามจะไม่เป็นอิสระจากสองสมการแรก หรือพูดอีกอย่างหนึ่งคือข่าวสารในสมการที่สามไม่ได้มีอะไรเพิ่มเติมจากข่าวสารในสองสมการแรก

นั่นคือกรณีที่เราสามารถเขียนแรงและความเร่งลงในระนาบ(มักเป็นระนาบของกระดาษในเวลาที่เราทำโจทย์) จำนวนแนวที่ให้สมการที่เป็นอิสระต่อกันจะมีเพียงสองแนว

ถ้าเราขยายไปเป็นกรณี 3 มิติ คือกรณีที่แรงอยู่ในปริภูมิ จำนวนแนวที่ให้สมการที่เป็นอิสระต่อกันจะมีเพียงสามแนว

ดังนั้น ถ้าเราจะกล่าวกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองในเชิงปฏิบัติแบบตามสะดวกก็กล่าวได้ว่า “ ณ เวลาหนึ่ง เวลาใดก็ได้ องค์ประกอบของแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุในแนวหนึ่ง แนวใดก็ได้ จะเท่ากับมวลคูณด้วยองค์ประกอบของความเร่งของวัตถุในแนวนั้น สำหรับวัตถุๆหนึ่ง จำนวนแนวที่ให้สมการเชิงเส้นที่เป็นอิสระต่อกันมีไม่เกินสามแนว”

ตัวอย่างที่ 9.3.3.1

1) เมื่อเราชั่งน้ำหนักของวัตถุด้วยการวางวัตถุบนจานตาชั่ง เข็มของตาชั่งจะบอกแรงที่จานตาชั่งกระทำต่อวัตถุ เราจะเรียกว่าแรง N ถ้าตาชั่งอยู่นิ่งเทียบกับผิวโลก น้ำหนักของวัตถุ W ขนาดจะเท่ากับ N ส่วนทิศจะตรงกันข้ามกัน ดังนั้นถ้าเรารู้ขนาดและทิศของ N ก็คือรู้ขนาดและทิศของน้ำหนัก

จงแสดงว่าน้ำหนักของวัตถุมวล m ว่าขึ้นกับละติจูด λ อย่างไร และจงหามุม β ซึ่งเป็นมุมที่น้ำหนักทำกับแนวดิ่ง (แนวรัศมีของโลก)

2)จงแสดงเป็นตัวอย่างให้เห็นว่า เมื่อเลือกสองแนวขึ้นมาแล้ว สมการจากแนวอื่นจะไม่เป็นอิสระกับสมการจากสองแนวที่เราเลือก

<u>วิธีทำ</u> เราจะคำนวณหาขนาดและทิศของแรง N ว่าขึ้นกับละติจูด λ อย่างไร เพราะเมื่อเรารู้ก็เท่ากับเรารู้ว่าขนาดและทิศของน้ำหนัก W ขึ้นกับละติจูด λ อย่างไร

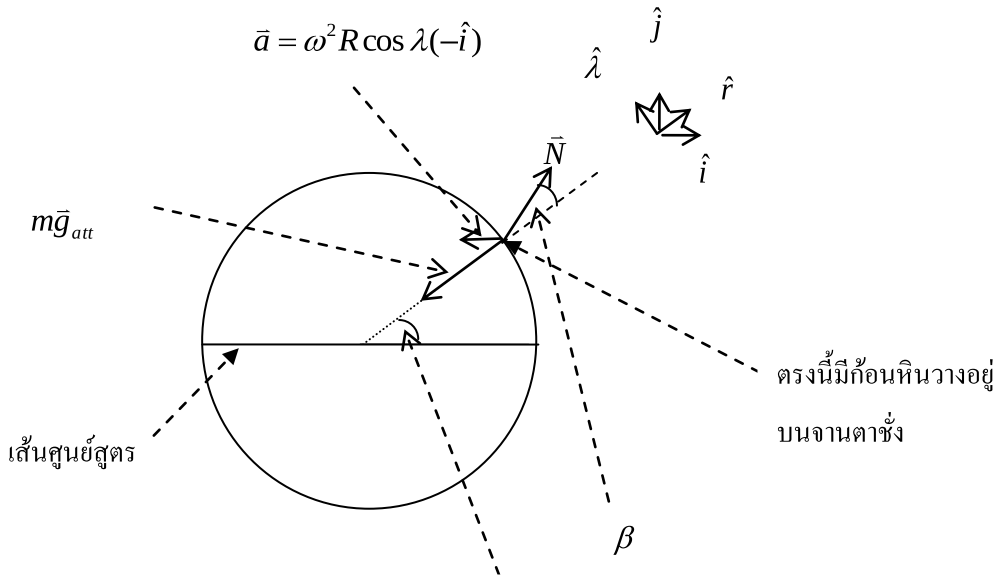
นักศึกษาควรรู้ว่าโจทย์ข้อนี้จะใช้ผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยไม่ได้ เพราะถ้าใช้ผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยคือไม่คิดผลของการหมุนของโลก น้ำหนักของวัตถุจะไม่ขึ้นกับละติจูด

หนังสือบางเล่มอาจใช้ผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิง เขาจึงต้องใช้แรง(เทียม)หนีศูนย์กลางด้วยในการคำนวณ แต่<u>ในที่นี้เราจะใช้กรอบอ้างอิงเฉื่อยและใช้แต่แรงจริงเท่านั้นในการคำนวณ</u>

สมมติมีก้อนหินมวล m <u>วางนิ่ง</u>บนจานตาชั่งบนผิวโลกที่ละติจูด λ

ให้ $\hat{r}$ และ $\hat{\lambda}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในแนวรัศมีโลก R และแนวตั้งฉากกับรัศมี R

$\hat{j}$ และ $\hat{i}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในแนวแกนหมุนและตั้งฉากกับแกนหมุนของโลก ดังในรูป ต.ย.9.3.3.1



รูป ต.ย.9.3.3.1

กรอบอ้างอิงเฉื่อยที่จะใช้กับโจทย์ข้อนี้อาจพิจารณาดังต่อไปนี้

แม้โลกจะหมุนแต่จุดศูนย์กลางของโลกจะอยู่นิ่งไม่ได้หมุนตามไปด้วย ดังนั้นกรอบอ้างอิงใดๆที่อยู่นิ่ง(หรือมีความเร็วคงที่)เทียบกับจุดศูนย์กลางโลกจะเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย ผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงเฉื่อยจะเห็นโลกหมุน

สมมติให้อัตราเร็วเชิงมุมที่โลกหมุนเป็น ω จินตนาการว่าตัวเราอยู่ที่จุดศูนย์กลางโลกหรืออยู่นิ่งห่างๆจากโลก เราจะเห็นก้อนหินเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี $R\cos\lambda$ โดยมีความเร่ง $\bar{a}=\omega^2 R\cos\lambda\ (-\hat{i})$ ความเร่งนี้เป็นความเร่งที่อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย

หลังจากที่เรารู้ความเร่งของก้อนหินแล้ว ต่อไปเราจะหาแรง(จริง) ที่ทำต่อก้อนหิน

<u>แรงที่ต้องสัมผัส</u>

ก้อนหินสัมผัสกับจานตาชั่ง ดังนั้นจานตาชั่งออกแรงกระทำต่อก้อนหินได้ เราให้แรงที่จานตาชั่งกระทำต่อก้อนหินเป็น $\vec{N}$

ก้อนหินจมในอากาศแต่เราไม่คิดแรงลอยตัวเพราะน้อยมากเมื่อเทียบกับ $\vec{N}$ และแรงดึงดูดของโลก

ก้อนหินไม่ได้เคลื่อนที่แหวกอากาศเพราะก้อนหินและอากาศบริเวณผิวโลกหมุนไปพร้อมๆกับโลก แรงต้านจากอากาศจึงไม่มี

ดังนั้นแรงที่ต้องสัมผัสมีแรงเดียวคือ $\vec{N}$

<u>แรงที่ไม่ต้องสัมผัส</u>

แรงดึงดูดของโลก $-\dfrac{GMm}{R^2}\hat{r}$ เมื่อ G คือค่านิจโน้มถ่วงสากล M คือมวลของโลก R คือรัศมีของโลก

เราจะเขียนแรงดึงดูดของโลกสั้นๆเป็น $m\vec{g}_{att}$ โดย $\vec{g}_{att} = -\dfrac{GM}{R^2}\hat{r}$

ในที่นี้การเขียนเป็น $\vec{g}_{att}$ เพื่อให้แตกต่างจาก $\vec{g}$ ที่เป็นความเร่งของการตกอย่างอิสระบนผิวโลก โดย $\vec{g}$ เป็นผลของแรงจริง $m\vec{g}_{att}$ และแรง(เทียม)หนีศูนย์กลาง แต่ไม่คิดผลของแรง(เทียม)โคริโอลิส และแรงต้านอากาศ อย่างไรก็ตามนักศึกษาอย่ายึดติดกับสัญลักษณ์ $\vec{g}_{att}$ และ $\vec{g}$ เพราะหนังสือแต่ละเล่มอาจใช้สัญลักษณ์ไม่เหมือนกัน

นักศึกษาจะเห็นว่าการที่เราดูแรงแบบที่ต้องสัมผัสและไม่ต้องสัมผัสทำให้เราได้แรงจริงเพราะสามารถระบุตัวผู้ออกแรงได้ เช่น $\vec{N}$ จานตาชั่งเป็นผู้ออกแรง $m\vec{g}_{att}$ โลกเป็นผู้ออกแรง

เรามาดูทิศของ $\vec{N}$ กันบ้าง แรง $\vec{N}$ จะอยู่ในแนวเดียวกับ $m\vec{g}_{att}$ ไม่ได้ เพราะถ้าเป็นเช่นนี้แรงทั้งสองจะตั้งฉากกับแนว $\hat{\lambda}$ ซึ่งจะทำให้ไม่มีองค์ประกอบของแรงในแนว $\hat{\lambda}$ แต่ความเร่ง $\omega^2 R\cos\lambda\ (-\hat{i})$ ไม่ได้ตั้งฉากกับแนว $\hat{\lambda}$ จึงมีองค์ประกอบในแนว $\hat{\lambda}$ ในเมื่อ $m\vec{g}_{att}$ ซึ่งมีทิศพุ่งเข้าจุดศูนย์กลางโลกจึงไม่มีองค์ประกอบในแนว $\hat{\lambda}$ ดังนั้น $\vec{N}$ ต้องมีองค์ประกอบในแนว $\hat{\lambda}$ คือ $\vec{N}$ ต้องเบนไปจากแนวของ $m\vec{g}_{att}$ ให้ β เป็นมุมที่เบนไปดังในรูป ต.ย.9.3.3.1

จาก $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

ดูในแนว $\hat{r}$; $\quad m g_{att} - N\cos\beta = m\omega^2 R\cos^2\lambda$ (1)

ดูในแนว $\hat{\lambda}$; $\quad N\sin\beta = m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda$ (2)

ดูในแนว $\hat{i}$; $\quad m g_{att}\cos\lambda - N\cos(\beta+\lambda) = m\omega^2 R\cos\lambda$ (3)

ดูในแนว $\hat{j}$; $m\,g_{att}\sin\lambda - N\sin(\beta+\lambda) = 0$ (4)

และยังมีแนวอื่นที่เราสามารถเขียนสมการได้อีกเป็นล้านๆแนว

ข่าวสารในสมการ(1)ถึง(4) เป็นข่าวสารที่ถูกต้อง(สำหรับโจทย์ข้อนี้) แต่ถ้าเราลองเปลี่ยนสมการ (1) เป็น $m\,g_{att} - 2N\cos\beta = m\omega^2 R\cos^2\lambda$ คือเติมเลข 2 หน้า $N\cos\beta$ ข่าวสารในสมการ $m\,g_{att} - 2N\cos\beta = m\omega^2 R\cos^2\lambda$ เป็นข่าวสารที่ไม่ถูกต้อง

สมการ(1)ถึง(4) มีตัวไม่รู้ค่า 2 ตัว คือ N และ β โดยหลักการแล้วเราต้องการสมการ 2 สมการที่เป็นอิสระต่อกันก็จะสามารถหาตัวไม่รู้ค่าได้

จะเห็นว่าทั้งแรงและความเร่งเราเขียนอยู่ในระนาบของกระดาษ(ไม่ใช่ในปริภูมิ) ดังนั้นจำนวนสมการที่เป็นอิสระต่อกันจะมีเพียง 2 สมการเท่านั้น

<u>ต่อไปจะเป็นการคำนวณ</u> โดย

1) จะแสดงว่าเราเลือกสมการจากสองแนวใดก็ได้ เราจะได้สมการสองสมการที่เป็นอิสระต่อกันทำให้แก้สมการหา N และ β ได้ ซึ่งก็คือรู้ว่าน้ำหนักของวัตถุมวล m ว่าขึ้นกับละติจูด λ อย่างไร และรู้มุม β ซึ่งเป็นมุมที่น้ำหนักทำกับแนวดิ่ง

2) ถ้าเราเลือกสมการมาสองสมการ จะแสดงเป็นตัวอย่างให้เห็นว่าสมการที่เหลือจะได้มาจากผลรวมเชิงเส้นของสองสมการแรก คือสมการที่เหลือไม่เป็นอิสระจากสองสมการแรก

<u>นักศึกษาไม่จำเป็นต้องดูอย่างละเอียดทุกหัวข้อย่อย ดูแค่บางหัวข้อย่อยให้รู้ว่าอะไรเป็นอะไรแล้วข้ามไปตัวอย่างที่ 9.3.3.2 ก็ได้</u>

1)

1.1) คู่สมการที่คำนวณง่ายคือ สมการ (1) และ (2) ซึ่งจะได้

จากสมการ(1); $N\cos\beta = mg_{att} - m\omega^2 R\cos^2\lambda$ (1.1.1)

(2)/(1.1.1) ; $\tan\beta = \dfrac{\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda}$ (1.1.2)

ยกกำลังสองสมการ(2) และ(1.1.1) บวกกันแล้วถอดรากที่สอง จะได้

$$N = m\{(\omega^2 R\cos \lambda \sin\lambda)^2 + (g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)^2\}^{1/2} \qquad (1.1.3)$$

ในตัวอย่างที่ 10.2.2 ในเรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆตอนต่อไปคือตอนที่ 10 นักศึกษาจะพบว่า $\{(\omega^2 R\cos \lambda \sin\lambda)^2 + (g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)^2\}^{1/2}$ คือความเร่งของการตกอย่างอิสระบนผิวโลก g ซึ่งยังไม่ได้ทำการประมาณใดๆ

1.2) จะใช้สมการ (1) และ(3)

เขียนเลขสมการใหม่เป็น

$$m\, g_{att} - N\cos\beta = m\omega^2 R\cos^2\lambda \qquad (1.2.1)$$

$$m\, g_{att}\cos\lambda - N\cos(\beta+\lambda) = m\omega^2 R\cos\lambda \qquad (1.2.2)$$

จาก(1.2.2) ; $N(\cos\beta\cos\lambda - \sin\beta\sin\lambda) = m\, g_{att}\cos\lambda - m\omega^2 R\cos\lambda$ (1.2.3)

จาก(1.2.1); $N\cos\beta = m(g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)$ (1.2.4)

(1.2.3)/(1.2.4); $(\cos\lambda - \tan\beta\sin\lambda) = \dfrac{g_{att}\cos\lambda - \omega^2 R\cos\lambda}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda}$

$$\tan\beta = \frac{1}{\sin\lambda}\{\cos\lambda - \frac{(g_{att}\cos\lambda - \omega^2 R\cos\lambda)}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda}\}$$

$$= \frac{1}{\sin\lambda}\{\frac{g_{att}\cos\lambda - \omega^2 R\cos^3\lambda - g_{att}\cos\lambda + \omega^2 R\cos\lambda}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda}\}$$

$$= \frac{1}{\sin\lambda}\{\frac{-\omega^2 R\cos^3\lambda + \omega^2 R\cos\lambda}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda}\}$$

$$= \frac{1}{\sin\lambda}\{\frac{\omega^2 R\cos\lambda(1-\cos^2\lambda)}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda}\}$$

$$\tan\beta = \frac{\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda}$$ (1.2.5) เหมือนกับ (1.1.2)

สร้างสามเหลี่ยมมุมฉากให้ด้านตรงข้ามมุม β ยาว $\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda$ ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $\sqrt{(\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda)^2 + (g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)^2}$ อีกด้านยาว $g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda$

จะได้ $\cos\beta = \dfrac{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda}{\sqrt{(\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda)^2 + (g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)^2}}$ แทนลงใน (1.2.4) ได้

$$N = m\{(\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda)^2 + (g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)^2\}^{1/2}$$ (1.2.6) เหมือนกับ (1.1.3)

1.3) จะใช้สมการ (1) และ(4)

เขียนเลขสมการใหม่เป็น

$$m\,g_{att} - N\cos\beta = m\omega^2 R\cos^2\lambda \quad (1.3.1)$$

$$m\,g_{att}\sin\lambda - N\sin(\beta+\lambda) = 0 \quad (1.3.2)$$

จาก(1.3.2) ; $N(\sin\beta\cos\lambda + \cos\beta\sin\lambda) = m\,g_{att}\sin\lambda$ (1.3.3)

จาก(1.3.1) ; $N\cos\beta = m(g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)$ (1.3.4)

(1.3.3)/(1.3.4); $(\tan\beta\cos\lambda + \sin\lambda) = \dfrac{g_{att}\sin\lambda}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda}$

$$\tan\beta = \frac{1}{\cos\lambda}\{\frac{g_{att}\sin\lambda}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda} - \sin\lambda\}$$

$$\tan\beta = \frac{1}{\cos\lambda}\{\frac{g_{att}\sin\lambda - g_{att}\sin\lambda + \omega^2 R\sin\lambda\cos^2\lambda}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda}\}$$

$$\tan\beta = \frac{\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda}$$ (1.3.5) เหมือนกับ (1.1.2)

จาก(1.3.5) ; $\cos\beta = \dfrac{(g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)}{\left\{(\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda)^2 + (g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)^2\right\}^{1/2}}$ (1.3.6)

จาก(1.3.1) ; $m\,g_{att} - N\cos\beta = m\omega^2 R\cos^2\lambda$

$$N = \frac{1}{\cos\beta}\left[mg_{att} - m\omega^2 R\cos^2\lambda\right] \quad (1.3.7)$$

แทน (1.3.6) ลงใน(1.3.7);

$$N = \left\{\frac{\{(\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda)^2 + (g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)^2\}^{1/2}}{(g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)}\right\}\left[mg_{att} - m\omega^2 R\cos^2\lambda\right]$$

$$N = m\{(\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda)^2 + (g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)^2\}^{1/2} \qquad (1.3.8)\ \text{เหมือนกับ (1.1.3)}$$

สำหรับคู่สมการอื่นๆนักศึกษาลองทำดู ซึ่งควรจะได้ $\tan\beta$ และ N เหมือนกับ (1.1.2) และ (1.1.3)

2) จะแสดงเป็นตัวอย่างให้เห็นว่าถ้าเราเลือกสมการใดก็ได้มาสองสมการ สมการที่เหลือจะได้มาจากผลรวมเชิงเส้นของสองสมการแรก คือจะไม่เป็นอิสระจากสองสมการแรก

2.1) เลือกสมการ(1) และ(2) จะแสดงว่า สมการ(3) ได้มาจากผลรวมเชิงเส้นของสมการ(1) และ(2)

เขียนเลขสมการใหม่เป็น

$$m\,g_{att} - N\cos\beta = m\omega^2 R\cos^2\lambda \qquad (2.1.1)$$

$$N\sin\beta = m\omega^2 R\cos\ \lambda\sin\lambda \qquad (2.1.2)$$

$$m\,g_{att}\cos\lambda - N\cos(\beta+\lambda) = m\omega^2 R\cos\lambda \qquad (2.1.3)$$

(2.1.1) คูณด้วย $\cos\lambda$; $m\,g_{att}\cos\lambda = N\cos\beta\cos\lambda + m\omega^2 R\cos^3\lambda$ (2.1.4)

(2.1.2) คูณด้วย $\frac{\cos(\beta+\lambda)}{\sin\beta}$; $N\cos(\beta+\lambda) = m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda\frac{\cos(\beta+\lambda)}{\sin\beta}$ (2.1.5)

(2.1.4) - (2.1.5); $m\,g_{att}\cos\lambda - N\cos(\beta+\lambda)$

$$= N\cos\beta\cos\lambda + m\omega^2 R\cos^3\lambda - m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda\frac{\cos(\beta+\lambda)}{\sin\beta} \qquad (2.1.6)$$

แทนค่า $N = \frac{1}{\sin\beta}m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda$ จากสมการ (2.1.2) ลงใน (2.1.6)

$$= \frac{1}{\sin\beta}m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda(\cos\beta\cos\lambda) + m\omega^2 R\cos^3\lambda - m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda\frac{\cos(\beta+\lambda)}{\sin\beta}$$

$$= \frac{1}{\sin\beta}m\omega^2 R[\cos^2\lambda\sin\lambda\cos\beta + \cos^3\lambda\sin\beta - \cos\lambda\sin\lambda(\cos\beta\cos\lambda - \sin\beta\sin\lambda)]$$

$$= \frac{1}{\sin\beta}m\omega^2 R[\cos^2\lambda\sin\lambda\cos\beta + \cos^3\lambda\sin\beta - \cos^2\lambda\sin\lambda\cos\beta + \cos\lambda\sin^2\lambda\sin\beta]$$

$$= \frac{1}{\sin\beta}m\omega^2 R[\cos^3\lambda\sin\beta + \cos\lambda\sin^2\lambda\sin\beta]$$

$$= m\omega^2 R\cos\lambda[\cos^2\lambda + \sin^2\lambda]$$

$$= m\omega^2 R\cos\lambda$$

เท่ากับทางขวามือของสมการ (2.1.3) แสดงว่าสมการ(2.1.3) หาได้จากผลรวมเชิงเส้นของสมการ (2.1.1) และ(2.1.2) ก็คือสมการ (2.1.3) ไม่เป็นอิสระจากสมการ (2.1.1) และ(2.1.2)

2.2) เลือกสมการ(1) และ(2) จะแสดงว่า สมการ(4) ได้มาจากผลรวมเชิงเส้นของสมการ(1) และ(2)

เขียนเลขสมการใหม่เป็น

$$m\,g_{att} - N\cos\beta = m\omega^2 R\cos^2\lambda \tag{2.2.1}$$

$$N\sin\beta = m\omega^2 R\cos\ \lambda\sin\lambda \tag{2.2.2}$$

$$m\,g_{att}\sin\lambda - N\sin(\beta+\lambda) = 0 \tag{2.2.3}$$

(2.2.1) คูณด้วย $\sin\lambda$; $m\,g_{att}\sin\lambda = N\cos\beta\sin\lambda + m\omega^2 R\cos^2\lambda\sin\lambda$ (2.2.4)

(2.2.2) คูณด้วย $\dfrac{\sin(\beta+\lambda)}{\sin\beta}$; $N\sin(\beta+\lambda) = m\omega^2 R\cos\ \lambda\sin\lambda\left(\dfrac{\sin(\beta+\lambda)}{\sin\beta}\right)$ (2.2.5)

(2.2.4) - (2.2.5); $mg_{att}\sin\lambda - N\sin(\beta+\lambda)$

$$= N\cos\beta\sin\lambda + m\omega^2 R\cos^2\lambda\sin\lambda - m\omega^2 R\cos\ \lambda\sin\lambda\left(\frac{\sin(\beta+\lambda)}{\sin\beta}\right) \tag{2.2.6}$$

ทางขวามือของสมการ (2.2.6) ควรเป็นศูนย์จึงจะเป็นสมการ(2.2.3)

แทนค่า $m\omega^2 R\cos\ \lambda\sin\lambda = N\sin\beta$ จากสมการ(2.2.2)ลงใน(2.2.6)

$$= N\cos\beta\sin\lambda + N\cos\lambda\sin\beta - N\sin\beta\left(\frac{\sin(\beta+\lambda)}{\sin\beta}\right)$$

$$= N\cos\beta\sin\lambda + N\cos\lambda\sin\beta - N(\sin\beta\cos\lambda + \cos\beta\sin\lambda) = 0$$

เท่ากับทางขวามือของสมการ (2.2.3) แสดงว่าสมการ(2.2.3) หาได้จากผลรวมเชิงเส้นของสมการ (2.2.1) และ(2.2.2) ก็คือสมการ (2.2.3) ไม่เป็นอิสระจากสมการ (2.2.1) และ(2.2.2)

2.3) เลือกสมการ(2) และ(3) จะแสดงว่า สมการ(1) ได้มาจากผลรวมเชิงเส้นของสมการ(2) และ(3)

เขียนเลขสมการใหม่เป็น

$$N\sin\beta = m\omega^2 R\cos \lambda \sin\lambda \qquad (2.3.1)$$

$$m\,g_{att}\cos\lambda - N\cos(\beta+\lambda) = m\omega^2 R\cos\lambda \qquad (2.3.2)$$

$$m\,g_{att} - N\cos\beta = m\omega^2 R\cos^2\lambda \qquad (2.2.3)$$

(2.3.2) หารด้วย $\cos\lambda$; $m\,g_{att} = N\dfrac{\cos(\beta+\lambda)}{\cos\lambda} + m\omega^2 R$ (2.3.4)

(2.3.1) คูณด้วย $\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$; $N\cos\beta = m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$ (2.3.5)

(2.3.4) - (2.3.5) ; $m\,g_{att} - N\cos\beta = N\dfrac{\cos(\beta+\lambda)}{\cos\lambda} + m\omega^2 R - m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$

$$= \frac{1}{\cos\lambda}N(\cos\beta\cos\lambda - \sin\beta\sin\lambda) + m\omega^2 R - m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$= \frac{1}{\cos\lambda\sin\beta}\{N\sin\beta(\cos\beta\cos\lambda - \sin\beta\sin\lambda) + m\omega^2 R\cos\lambda\sin\beta - m\omega^2 R\cos^2\lambda\sin\lambda\cos\beta\}$$

(2.3.6)

แทนค่า $N\sin\beta = m\omega^2 R\cos \lambda\sin\lambda$ จาก (2.3.1) ลงใน(2.3.6)

$$= \frac{1}{\cos\lambda\sin\beta}\{m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda(\cos\beta\cos\lambda - \sin\beta\sin\lambda)$$
$$+ m\omega^2 R\cos\lambda\sin\beta - m\omega^2 R\cos^2\lambda\sin\lambda\cos\beta\}$$

$$= \frac{1}{\sin\beta}\{m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda\cos\beta - m\omega^2 R\sin^2\lambda\sin\beta + m\omega^2 R\sin\beta - m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda\cos\beta\}$$

$$= \frac{1}{\sin\beta}\{-m\omega^2 R\sin^2\lambda\sin\beta + m\omega^2 R\sin\beta\}$$

$$= \{-m\omega^2 R\sin^2\lambda + m\omega^2 R\} = m\omega^2 R\cos^2\lambda$$

เท่ากับทางขวามือของสมการ (2.3.3) แสดงว่าสมการ(2.3.3) หาได้จากผลรวมเชิงเส้นของสมการ (2.3.1) และ(2.3.2) ก็คือสมการ (2.3.3) ไม่เป็นอิสระจากสมการ (2.3.1) และ(2.3.2)

การเลือกคู่สมการอื่นๆแล้วแสดงว่าสมการที่เหลือได้จากผลรวมเชิงเส้นของคู่สมการนี้ นักศึกษาลองทำดูเอง นักศึกษาจะเห็นว่าแนวที่เราเขียนสมการไม่จำเป็นต้องเป็นแนวที่ตั้งฉากกัน แต่เป็นแนวใดก็ได้ ถ้าแนวนั้นทำให้การคำนวณง่ายเราก็เลือกแนวนั้น นอกจากนี้จะเห็นว่ามีสองสมการเท่านั้นที่ข่าวสารแตกต่างกัน การเขียนสมการที่สามไม่มีประโยชน์เพราะข่าวสารจะไปซ้ำกับข่าวสารในสองสมการแรก

หมายเหตุ " ถ้าเราเลือกสมการมาสองสมการจากสองแนว สมการจากแนวอื่นๆจะได้จากผลรวมเชิงเส้นของสองสมการแรก " มาจากการที่คิดๆดูแล้วมันน่าจะเป็นเช่นนี้

การคำนวณในข้อ 2) ไม่ใช่การพิสูจน์ว่าถ้าเราเลือกสมการมาสองสมการ สมการที่เหลือจะได้มาจากผลรวมเชิงเส้นของสองสมการแรก ที่ไม่ใช่การพิสูจน์เพราะแนวที่เราเขียนขึ้นมาเขียนเพียง 4 แนว จากจำนวนล้านๆแนว มันจึงเป็นกรณีเฉพาะอันหนึ่งเท่านั้น ในโจทย์ข้อ 2) จึงใช้คำว่า "จงแสดงเป็นตัวอย่างให้เห็นว่า" ไม่ใช่ "จงพิสูจน์ว่า"

ตัวอย่างที่ 9.3.3.2 กล่องมวล m ไถลลงมาตามพื้นเอียงฝืดที่ทำมุม 30^0 กับแนวระดับ ดังรูป ต.ย.9.3.3.2ก ถ้าสัมประสิทธิ์ระหว่างกล่องและพื้นเอียงเท่ากับ μ_k

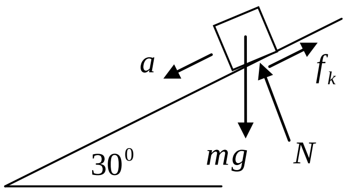
1)จงหาความเร่งของกล่องและขนาดของแรงที่พื้นเอียงกระทำต่อกล่อง

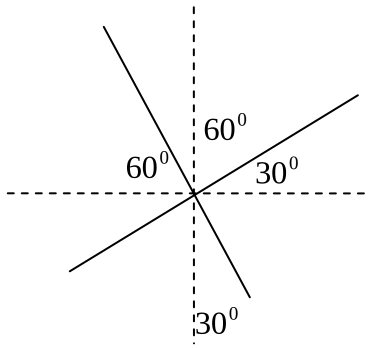
2)จงแสดงเป็นตัวอย่างให้เห็นว่า เมื่อเลือกสองแนวขึ้นมาแล้ว สมการจากแนวอื่นจะไม่เป็นอิสระกับสมการจากสองแนวที่เราเลือก

วิธีทำ

โจทย์ถามว่าจงหาความเร่งของกล่อง แม้ไม่ระบุให้ชัดเจนว่าเป็นความเร่งอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงใด แต่เป็นที่รู้กันว่าอ้างอิงกับผิวโลก และเป็นที่รู้กันว่าโจทย์แบบนี้เราถือได้ว่าผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย นอกจากนี้จะเห็นว่าโจทย์จะไม่ระบุว่าผู้สังเกตความเร่งจะอยู่บนพื้นราบหรืออยู่บนพื้นเอียง เพราะตำแหน่งของผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงไม่สำคัญ สำคัญที่ตัวกรอบอ้างอิงดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 9.1.4 เราถือว่าไม่ว่าจะอยู่บนพื้นราบหรือพื้นเอียงก็อยู่ในกรอบอ้างอิงผิวโลก

ให้ a เป็นความเร่งของกล่อง(อ้างอิงกับผิวโลก) ทิศของความเร่งจะลงมาตามพื้นเอียงดังในรูป ต.ย.9.3.3.2ก





ข.

รูป ต.ย.9.3.3.2ก

ต่อไปเราจะหาแรงจริงที่กระทำต่อกล่อง โดยเริ่มจากหาแรงที่ต้องสัมผัส จากนั้นก็หาแรงที่ไม่ต้องสัมผัส

กล่องสัมผัสกับพื้นเอียง <u>พื้นเอียงออกแรงทำต่อกล่อง</u>ได้ แตกแรงที่พื้นเอียงกระทำต่อกล่องให้อยู่ในแนวตั้งฉากกันเป็น N และ f_k นักศึกษาพึงระลึกว่าการแตกแรง(แตกเวกเตอร์)ต้องแตกให้อยู่ในแนวตั้งฉากกัน ไม่เช่นนั้นมันจะใช้ประโยชน์ไม่ได้ (บางคนเขาใช้คำพูดว่า "การแตกเวกเตอร์ให้อยู่ในแนวที่ไม่ตั้งฉากกัน ไม่มีความหมาย") แรงที่พื้นเอียงกระทำต่อกล่องจะมีขนาดเป็น $\sqrt{N^2 + f_k^2}$ โดย $f_k = \mu_k N$ ถ้าเรารู้ N ก็เท่ากับรู้แรงที่พื้นเอียงกระทำต่อกล่อง ดังนั้นในตัวอย่างนี้จึงจะแสดงเพียงแค่การคำนวณหา N

กล่องแตะกับอากาศ แต่ในที่นี้เราไม่คิดแรงต้านจากอากาศและแรงลอยตัวเนื่องจากกล่องจมอยู่ในอากาศเพราะถือว่าน้อยมาก

แรงที่ต้องสัมผัสหมดแล้ว ที่เหลือคือแรงที่ไม่ต้องสัมผัส ซึ่งคือ<u>แรงดึงดูดของโลก</u> mg ทิศลงในแนวดิ่ง

จะเห็นว่าทั้งแรงและความเร่งเราเขียนอยู่ในระนาบของกระดาษ ดังในรูป ต.ย. 9.3.3.2 ก. ดังนั้นจะมีจำนวนสมการที่เป็นอิสระต่อกันสองสมการเท่านั้น

เราจะเลือกดูแนวสี่แนว(จากนับไม่ถ้วนแนวที่สามารถดูได้) คือแนวตามพื้นเอียง แนวตั้งฉากกับพื้นเอียง แนวระดับ และแนวดิ่ง โดยรูป ต.ย. 9.3.3.2 ข. เป็นรูปช่วยในการเขียนสมการในแต่ละแนว

สมการของทั้งสี่แนวเป็นดังต่อไปนี้

แนวตามพื้นเอียง ; $mg\sin 30^0 - \mu_k N = ma$ (1)

แนวตั้งฉากกับพื้นเอียง ; $mg\cos 30^0 - N = 0$ (2)

แนวระดับ ; $N\sin 30^0 - \mu_k N\cos 30^0 = ma\cos 30^0$ (3)

แนวดิ่ง ; $mg - N\cos 30^0 - \mu_k N\sin 30^0 = ma\sin 30^0$ (4)

ทั้งสี่สมการนี้มีตัวไม่รู้ค่า 2 ตัวคือ N และ a โดยหลักการแล้วเราต้องการสมการ 2 สมการที่เป็นอิสระต่อกันก็จะสามารถหาตัวไม่รู้ค่าได้ ถ้าเราเลือกสองสมการจะเป็นสมการใดก็ได้ สมการทั้งสองจะเป็นอิสระต่อกัน ทำให้เราแก้สมการหา N และ a ได้ และถ้าเราเลือกสองสมการขึ้นมาแล้วสมการที่เหลือจะหาได้จากผลรวมเชิงเส้นของสองสมการนี้

<u>ต่อไปจะเป็นการคำนวณ</u> โดย

1) จะหา N และ a จากสองสมการใดก็ได้

2) จะแสดงตัวอย่างว่าถ้าเราเลือกสมการมาสองสมการ สมการที่เหลือจะได้มาจากผลรวมเชิงเส้นของสองสมการที่เราเลือก

1)

1.1) โดยปกติแล้วเรามักเลือกแนวตามพื้นเอียงและแนวตั้งฉากกับพื้นเอียง แนวทั้งสองจะให้สมการที่เป็นอิสระต่อกัน คือ

$$mg\sin 30^0 - \mu_k N = ma \qquad (1)$$

$$mg\cos 30^0 - N = 0 \qquad (2)$$

จากสองสมการนี้เราสามารถแก้สมการหาคำตอบได้โดยง่าย โดยจากสมการ (2) จะได้ $N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ และเมื่อนำไปแทนในสมการ(1) จะได้ $a = g\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k\right)$

1.2) ถ้าเราเลือกแนวระดับและแนวดิ่ง แนวทั้งสองก็จะให้สมการที่เป็นอิสระต่อกัน คือ

ในแนวระดับ ; $N\sin 30^0 - \mu_k N\cos 30^0 = m\,a\cos 30^0$ (3)

ในแนวดิ่ง ; $m\,g - N\cos 30^0 - \mu_k N\sin 30^0 = ma\sin 30^0$ (4)

จากสมการทั้งสองเราสามารถแก้สมการหา N และ a ได้ เรามาดูรายละเอียดในการแก้สมการกันสักหน่อย

จากสมการ(3); $\frac{1}{2}N - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k N = \frac{\sqrt{3}}{2}m\,a$ (5)

จากสมการ(4) $m\,g - \frac{\sqrt{3}}{2}N - \frac{1}{2}\mu_k N = \frac{1}{2}ma$ (6)

เพื่อจะกำจัด a คูณสมการ (6) ด้วย $\sqrt{3}$

$$\sqrt{3}m\,g - \frac{3}{2}N - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k N = \frac{\sqrt{3}}{2}ma \quad (7)$$

(5) – (7) ; จะได้ $N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ เมื่อแทนใน (5) จะได้ $a = g\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k\right)$ เป็นคำตอบเดียวกับเมื่อใช้สมการ(1) และ(2) แต่การทำคณิตศาสตร์ยุ่งยากกว่าการใช้สมการ(1) และ(2) เล็กน้อย แต่ก็ยังไม่ยุ่งยากมาก

นักศึกษาอาจลองเลือกคู่สมการอื่นดู เช่นแนวตามพื้นเอียงกับแนวดิ่งก็จะได้คำตอบออกมาเช่นกัน

คราวนี้เรามาลองเลือกแนวที่ไม่มีใครเขาเลือกกัน คือแนว 40° กับแนวระดับ และแนว 70° กับแนวระดับ แนวทั้งสองก็ยังคงให้สมการที่เป็นอิสระต่อกัน คือ

แนว 40° กับแนวระดับ ; $mg\cos 50^o - \mu_k N\cos 10^0 - N\cos 80^o = m\,a\cos 10^0$ (8)

แนว 70° กับแนวระดับ ; $mg\cos 20^o - \mu_k N\cos 40^0 - N\cos 50^o = m\,a\cos 40^0$ (9)

สมการ(8) และ(9) เมื่อเรากดเครื่องคิดเลขหาค่า cos จะได้

$$mg(0.6428) - \mu_k N(0.9848) - N(0.1737) = m\,a(0.9848) \quad (10)$$

$$mg(0.9397) - \mu_k N(0.7660) - N(0.6428) = m\,a(0.7660) \quad (11)$$

เพื่อที่จะกำจัด a คูณสมการ(10) ด้วย $\frac{0.7660}{0.9848}$

$$mg(0.6428)\left(\frac{0.7660}{0.9848}\right)-\mu_k N(0.7660)-N(0.1737)\left(\frac{0.7660}{0.9848}\right)=m\,a\,(7660)$$

$$mg(0.5000)-\mu_k N(0.7660)-N(0.1351)=m\,a\,(7660) \qquad (12)$$

(11)-(12); $mg(0.4397)-N(0.5077)=0$

$$N=0.8661mg \qquad (13)$$

เมื่อเทียบกับคำตอบจาก 1.1 และ1.2 คือ $N=\frac{\sqrt{3}}{2}mg=0.8660\,mg$ จะเห็นว่ามันแค่คลาดเคลื่อนจากการปัดทศนิยม จริงๆแล้วมันคือคำตอบเดียวกัน

แทน(13) ลงใน(11)

$$mg(0.9397)-\mu_k(0.8661mg)(0.7660)-(0.8661mg)(0.6428)=m\,a\,(0.7660)$$

$$a=g\left(0.5-0.8661\mu_k\right)$$

เมื่อเทียบกับคำตอบจาก 1.1 และ1.2 คือ $a=g\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k\right)$ จะเห็นว่ามันแค่คลาดเคลื่อนจากการปัดทศนิยม จริงๆแล้วมันคือคำตอบเดียวกัน

นักศึกษาจะเห็นว่าแนว 40° กับแนวระดับ และแนว 70° กับแนวระดับ แม้เราจะหา N และ a ได้ แต่เป็นแนวที่ไม่เหมาะสม เพราะคิดเลขยาก

2) จะแสดงว่าถ้าเราเลือกสมการมาสองสมการ สมการที่เหลือจะได้มาจากผลรวมเชิงเส้นของสองสมการแรก

เราจะเลือกสมการ(1) และ(2) มา แล้วแสดงว่าสมการ(3) และ(4) หาได้จากผลรวมเชิงเส้นของสมการ(1) และ(2)

ในแนวตามพื้นเอียง ; $m\,g\sin 30^0-\mu_k N=m\,a$ (1)

แนวตั้งฉากกับพื้นเอียง ; $m\,g\cos 30^0-N=0$ (2)

คูณสมการ(1) ด้วย cos30° ; $m\,g\sin 30^0\cos 30^o-\mu_k N\cos 30^0=m\,a\cos 30^o$ (1a)

(2)+(1a); $$m\,g\sin 30^0\,\cos 30^o - \mu_k N\cos 30^0 + mg\cos 30^o - N = m\,a\cos 30^o$$

แทนค่า $m\,g = \dfrac{2}{\sqrt{3}}N$ จะได้

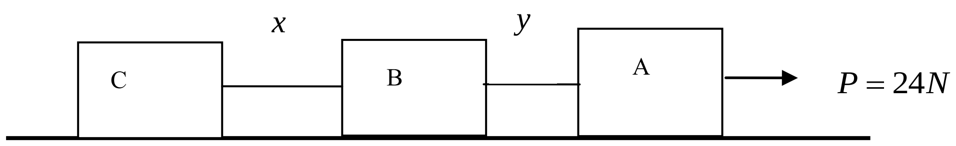
$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}N\right)\sin 30^0\,\cos 30^o - \mu_k N\cos 30^0 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}N\right)\cos 30^o - N = m\,a\cos 30^o$$

จะได้ $$N\sin 30^0 - \mu_k N\cos 30^0 = m\,a\cos 30^0$$

เป็นสมการเดียวกับสมการ(3) นั่นเอง ก็คือสมการ(3) หาได้จากผลรวมเชิงเส้นของสมการ(1) และ(2)

ในที่นี้เราจะแสดงแค่นี้ ถ้านักศึกษาอยากดูสมการอื่นก็สามารถลองทำเองได้ เช่นอาจแสดงว่าสมการ(1) หาได้จากผลรวมเชิงเส้นของสมการ(2) และ(3) หรือ (2) และ(4) หรือ (3) และ(4) เป็นต้น

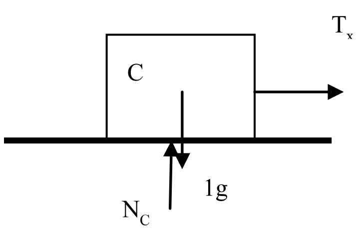
ตัวอย่างที่9.3.3.3 มวล A , B และ C ขนาด 3 , 2 และ 1 กิโลกรัมตามลำดับ ผูกติดกันด้วยเชือกเบา x และ y เมื่อออกแรง P เท่ากับ 24 นิวตัน กระทำต่อมวล A ดังรูป ต.ย.9.3.3.3 ก. จงหาแรงตึงเชือกของเชือกเส้น x และเส้น y ถ้าพื้นเป็นพื้นลื่น



รูป ต.ย.9.3.3.3ก.

<u>วิธีทำ</u> กรอบอ้างอิงเฉื่อยในข้อนี้เรารู้ว่าใช้ผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยได้ เหมือนตัวอย่างที่ 9.3.3.2 และเรารู้ว่ามวลทุกก้อนมีความเร่งเดียวกันเพราะโยงติดกันด้วยเชือก ให้ a เป็นความเร่งของมวลเหล่านี้ (อ้างอิงกับผิวโลก) โดยทิศของความเร่งมีทิศไปทางขวา

<u>พิจารณามวล C</u> เราจะหาแรงจริงที่กระทำต่อ C



ข.

จากรูป ข. มวล C สัมผัสกับเชือก x และพื้น ดังนั้น

<u>แรงที่ต้องสัมผัส</u>

แรงตึงเชือก T_x ของเชือก x ทิศไปทางขวา

แรง N_C ที่พื้นกระทำต่อ C ทิศชี้ขึ้น

<u>แรงที่ไม่ต้องสัมผัส</u>

แรงดึงดูดของโลก 1g ทิศชี้ลง

ดูในแนวระดับ ; $T_x = 1a$ (1)

สมการ(1) เป็นสมการเชิงเส้นมีตัวไม่รู้ค่า 2 ตัว คือ T_x และ a จำนวนสมการจึงยังไม่พอ

ดูในแนวดิ่ง ; $N_C = 1g$ (2)

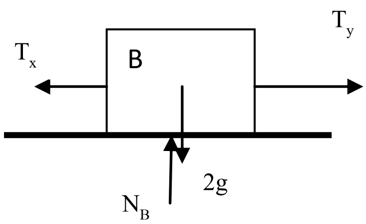
สมการ(1) และ(2) เป็นสมการเชิงเส้น 2 สมการมีตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว คือ T_x , a และ N_C จำนวนสมการจึงยังไม่พอ

ถ้าเราดูเพิ่มอีกแนว ตัวอย่างเช่นในแนว 30° กับแนวระดับ จะได้ว่า

$$T_x \cos 30^o + N_C \cos 60^o - 1g \cos 60^o = 1a \cos 30^o \qquad (2a)$$

แต่ไม่มีประโยชน์ที่จะเขียนสมการนี้ ข่าวสารในสมการนี้ไม่มีอะไรแปลกใหม่เพิ่มเติมจากสมการ (1) และ (2) เพื่อที่จะได้ข่าวสารใหม่ๆ เราจะเปลี่ยนวัตถุเป็นมวล B

<u>พิจารณามวล B</u> เราจะหาแรงจริงที่กระทำต่อ B



ค.

จากรูป ค. มวล B สัมผัสเชือก x เชือก y และพื้น ดังนั้น

<u>แรงที่ต้องสัมผัส</u>

แรงตึงเชือก T_x ของเชือก x ทิศไปทางซ้าย

แรงตึงเชือก T_y ของเชือก y ทิศไปทางขวา

แรง N_B ที่พื้นกระทำต่อ B ทิศชี้ขึ้น

<u>แรงที่ไม่ต้องสัมผัส</u>

แรงดึงดูดของโลก 2g ทิศชี้ลง

ดูในแนวระดับ ; $T_y - T_x = 2a$ (3)

ขณะนี้เรามีสมการที่เป็นอิสระต่อกัน 3 สมการ คือสมการ(1) (2) และ(3) มีตัวไม่รู้ค่า 4 ตัว คือ T_x ,T_y, N_C และ a จำนวนสมการจึงยังไม่พอ

ดูในแนวดิ่ง ; $N_B = 2g$ (4)

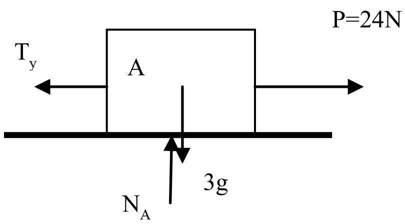
สมการ(1) (2) (3) และ(4) เป็นสมการเชิงเส้น 4 สมการมีตัวไม่รู้ค่า 5 ตัว คือ T_x ,T_y, N_C, N_B และ a จำนวนสมการจึงยังไม่พอ

ถ้าเราดูเพิ่มอีกแนว ตัวอย่างเช่นในแนว 45° กับแนวระดับ จะได้ว่า

$$T_y \cos 45^o - T_x \cos 45^o + N_B \cos 45^o - 2g \cos 45^o = 2a \cos 45^o \qquad \text{(4a)}$$

แต่ไม่มีประโยชน์ที่จะเขียนสมการนี้ ข่าวสารในสมการนี้ไม่มีอะไรแปลกใหม่เพิ่มเติมจากสมการ (3) และ (4) เพื่อที่จะได้ข่าวสารใหม่ๆ เราจะเปลี่ยนวัตถุเป็นมวล A

<u>พิจารณามวล A</u> เราจะหาแรงจริงที่กระทำต่อ A



ง.

จากรูป ง. มวล A สัมผัสเชือก y แรง P และพื้น ดังนั้น

<u>แรงที่ต้องสัมผัส</u>

แรงตึงเชือก T_y ของเชือก y ทิศไปทางซ้าย

แรง P ทิศไปทางขวา

แรง N_A ที่พื้นกระทำต่อ A ทิศชี้ขึ้น

<u>แรงที่ไม่ต้องสัมผัส</u>

แรงดึงดูดของโลก 3g ทิศชี้ลง

ดูในแนวระดับ ; $24 - T_y = 3a$ (5)

ขณะนี้เรามีสมการที่เป็นอิสระต่อกัน 5 สมการ คือสมการ(1) (2) (3) (4) และ(5) มีตัวไม่รู้ค่า 5 ตัว คือ T_x ,T_y, N_C, N_B และ a จำนวนสมการพอแล้ว แก้สมการออกมาจะได้

T_x	=	4	นิวตัน	<u>ตอบ</u>
T_y	=	12	นิวตัน	<u>ตอบ</u>

เรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอนที่ 9.4 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองกรณีระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล

มกราคม 2565

ในตอนที่ 9.3 เราสนใจเฉพาะปัญหาที่ไม่ต้องคำนึงถึงรูปร่างของวัตถุเพราะทุกตำแหน่งของวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเดียวกันจึงพิจารณาวัตถุเป็นอนุภาคได้ ในตอนที่ 9.4 นี้นักศึกษาจะเห็นว่าถ้าที่ตำแหน่งต่างๆในวัตถุมีความเร่งแตกต่างกันเราจะใช้ความเร่งที่จุดไหนเป็นตัวแทน นอกจากนี้นักศึกษายังอาจใช้ตอนที่ 9.4 ตรวจสอบคำตอบของแบบฝึกหัดหรือข้อสอบเพื่อลดข้อผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้น โดยในตอนที่ 9.4 นี้จะไม่กล่าวมากนักในเรื่องความเป็นอิสระเชิงเส้นของสมการ การเลือกแนวในการเขียนสมการก็จะเลือกแนวที่เขียนสมการได้ง่ายๆ

9.4.1 ระบบทางกลศาสตร์

ระบบในทางกลศาสตร์อาจแบ่งออกเป็น 3 ชนิดคือ ก)อนุภาค ข) ระบบอนุภาค ค) วัตถุแข็งเกร็ง เราจะมาดูแต่ละชนิดว่าเป็นอย่างไร

9.4.1.1 อนุภาค

นิยามของอนุภาคคือวัตถุที่มีความกว้าง ความยาว ความสูงน้อยมาก คือเป็นจุด แต่มีมวล เนื่องจากมีสมาชิกแค่ตัวเดียว(อนุภาคตัวเดียว)จึงไม่มีแรงภายในระบบ มีแต่แรงภายนอกระบบ เราได้กล่าวถึงกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองกรณีอนุภาคมาแล้วในหัวข้อ 9.3

9.4.1.2 ระบบอนุภาค

ระบบอนุภาค คือระบบที่สมาชิกของระบบประกอบด้วยอนุภาคหลายตัวอยู่ห่างกัน จึงมีทั้งแรงภายในระบบซึ่งเป็นแรงที่สมาชิกทำต่อกัน และแรงภายนอกระบบซึ่งผู้ออกแรงไม่ใช่สมาชิกของระบบ

9.4.1.3 วัตถุแข็งเกร็ง

คือระบบอนุภาคชนิดหนึ่งที่สมาชิกเรียงชิดติดกันอย่างต่อเนื่อง ไม่ได้อยู่ห่างๆกัน โดยเมื่อถูกแรงกระทำรูปร่างของวัตถุไม่เปลี่ยนเราจึงเรียกมันว่าวัตถุแข็งเกร็ง

9.4.2 จุดศูนย์กลางมวล (center of mass)

จุดศูนย์กลางมวลมักถูกใช้บรรยายการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง มันไม่ใช่เป็นเพียงแค่จุดที่คล้ายกับว่ามวลทั้งหมดของระบบไปอัดอยู่ แต่มันมีอะไรที่มากกว่านั้น ตัวอย่างเช่นปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อนของการชนกันของวัตถุ กรอบอ้างอิงที่ติดไปกับจุดศูนย์กลางมวลเป็นกรอบอ้างอิงที่เหมาะในการใช้แก้ปัญหา หรือในกรณีการหมุน จุดอ้างอิงที่ทำให้สมการ $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ หรือสมการ $\tau = I\alpha$ เป็นจริงเสมอคือจุดศูนย์กลางมวล อย่างไรก็ตามในตอนที่ 9.4 นี้ เราจะใช้จุดศูนย์กลางมวลเพียงแค่เป็นจุดที่คล้ายกับว่ามวลทั้งหมดของระบบไปอัดอยู่

เพื่อให้เข้าใจง่ายเราจะเริ่มด้วยการใช้ระบบอนุภาคเป็นตัวอย่างในการหาจุดศูนย์กลางมวล เพราะระบบอนุภาคสมาชิกอยู่ห่างกันการรวมจึงเป็นการรวมแบบ “บวก” (sum) เมื่อจะหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแข็งเกร็งก็เพียงแต่เปลี่ยนการรวมแบบบวกไปเป็นการรวมแบบอินทิเกรต (integrate) เพราะสมาชิก (ส่วนย่อย)ของวัตถุแข็งเกร็งอยู่เรียงชิดติดกันอย่างต่อเนื่อง

สมมติมีระบบอนุภาคซึ่งมีอนุภาคตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป

ให้ $m_1, m_2, \ldots$ คือมวลของอนุภาคตัวที่ 1 ตัวที่ 2 ...

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ 1 ตัวที่ 2 ...

โดยจุดกำเนิดของเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots$ เป็นจุดกำเนิดเดียวกัน เราจะเลือกจุดใดก็ได้เป็นจุดกำเนิด

จุดศูนย์กลางมวล (CM) ของระบบอนุภาคเป็นจุดซึ่งเวกเตอร์ตำแหน่งนิยามด้วย

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} \qquad (9.4.2.1)$$

ถ้าเราเขียนให้อยู่ในองค์ประกอบของพิกัดฉากก็จะได้ว่า

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} \qquad (9.4.2.1a)$$

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} \qquad (9.4.2.1b)$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...} \qquad (9.4.2.1c)$$

จากสมการ (9.4.2.1) ถ้าหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาหนึ่งและสองครั้งก็จะได้ความเร็วและความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล คือ

$$\frac{d\,\vec{r}_{CM}}{dt} = \vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...} \qquad (9.4.2.2)$$

$$\frac{d\,\vec{v}_{CM}}{dt} = \vec{a}_{CM} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...} \qquad (9.4.2.3)$$

เมื่อ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...$ คือความเร็วของอนุภาคตัวที่ 1, ตัวที่ 2 ,...

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...$ คือความเร่งของอนุภาคตัวที่ 1 , ตัวที่ 2 ,...

จากสมการ (9.4.2.2) จะได้ว่า

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... = (m_1 + m_2 + ...)\,\vec{v}_{CM} \qquad (9.4.2.2\ a)$$

คือโมเมนตัมทั้งหมดของระบบคิดได้คล้ายกับว่ามวลทั้งหมดของระบบไปอัดอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล

จากสมการ (9.4.2.3) จะได้ว่า

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + ... = (m_1 + m_2 + ...)\,\vec{a}_{CM} \qquad (9.4.2.3\ a)$$

คือผลบวก(บวกแบบเวกเตอร์)ของมวลคูณด้วยความเร่งของสมาชิกทั้งหมดของระบบคิดได้คล้ายกับว่ามวลทั้งหมดของระบบไปอัดอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล

ในกรณีของวัตถุแข็งเกร็ง เรามองว่าวัตถุแข็งเกร็งประกอบด้วยมวลชิ้นเล็กๆ dm เรียงชิดติดกันอย่างต่อเนื่อง ให้เวกเตอร์ตำแหน่งของ dm เป็น $\vec{r}$ ความเร็วเป็น $\vec{v}$ และความเร่งเป็น $\vec{a}$ ดังนั้น เมื่อเปลี่ยนการรวมในสมการ (9.4.2.1) (9.4.2.2) และ (9.4.2.3)เป็นการรวมแบบอินทิเกรต จะได้ว่า

จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแข็งเกร็ง ; $$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\ dm}{\int dm} \qquad (9.4.2.4)$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\int \vec{v}\ dm}{\int dm} \qquad (9.4.2.5)$$

$$\bar{a}_{CM} = \frac{\int \bar{a}\, dm}{\int dm} \qquad (9.4.2.6)$$

ตัวอย่างที่ 9.4.2.1 จะเป็นตัวอย่างง่ายๆในการคำนวณตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง ของจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค

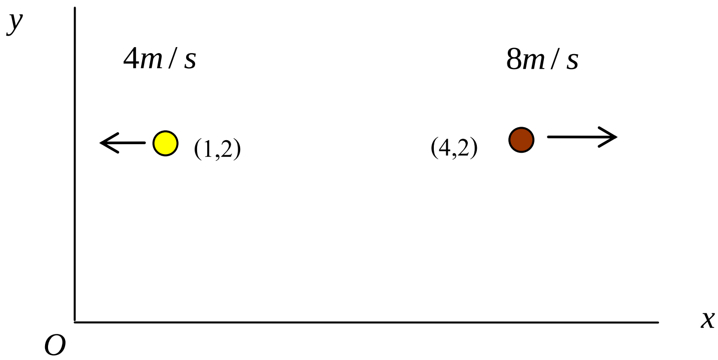
ตัวอย่างที่ 9.4.2.1 อนุภาค 2 ตัว ตัวแรกมวล 2 กิโลกรัมและตัวที่สองมวล 4 กิโลกรัม เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ณ เวลาหนึ่งอยู่ห่างกัน 3 เมตร ดังรูป ต.ย.9.4.2.1 อนุภาคตัวแรกเคลื่อนเร็วขึ้นเรื่อยๆไปทางซ้ายด้วยความเร็ว 4 เมตรต่อวินาที และด้วยอัตราเร่ง 2 เมตรต่อวินาที^{2} อนุภาคตัวที่สองเคลื่อนช้าลงเรื่อยๆไปทางขวาด้วยความเร็ว 8 เมตรต่อวินาที และด้วยอัตราเร่ง 1 เมตรต่อวินาที^{2}

ณ เวลาที่อนุภาคทั้งสองอยู่ห่างกัน 3 เมตร

ก)จงหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล(CM) ของระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคทั้งสองนี้

ข) จงหาความเร็วของ CM ค) จงหาความเร่งของ CM

วิธีทำ เราสร้างพิกัดฉากให้จุดกำเนิดและอนุภาคทั้งสองอยู่ในระนาบ xy เพื่อไม่ต้องคำนวณหา z (เพราะ $z = 0$) ให้จุดกำเนิดอยู่ตรงไหนก็ได้ในระนาบ xy แม้เวกเตอร์ตำแหน่งของ CM อาจแตกต่างกันเพราะเวกเตอร์ตำแหน่งขึ้นกับจุดกำเนิด แต่ตำแหน่งของ CM จะเป็นตำแหน่งเดียวกัน ในรูป ต.ย.9.4.2.1 เราให้จุดกำเนิดและพิกัดฉาก xy อยู่ในลักษณะที่ทำให้อนุภาคตัวแรกมีพิกัด (1,2) เมตร อนุภาคตัวที่สองมีพิกัด (4,2) เมตร



รูป ต.ย.9.4.2.1

ก) จากสมการ(9.4.2.1a) และ (9.4.2.1b) จะได้

$$x_{CM} = \frac{(2\,kg)(1m) + (4\,kg)(4\,m)}{(2kg) + (4kg)} = 3 \text{ เมตร} \qquad y_{CM} = \frac{(2kg)(2m) + (4kg)(2m)}{(2kg) + (4kg)} = 2 \text{ เมตร}$$

$$\therefore \quad \vec{r}_{CM} = 3\,\hat{i} + 2\,\hat{j} \text{ เมตร}$$

คือตำแหน่งของ CM อยู่บนแนวเส้นตรงที่เชื่อมมวลทั้งสอง โดยห่างจากมวล 2 kg 2 เมตร และห่างจากมวล 4 kg 1 เมตร ไม่ว่าจุดกำเนิดของพิกัดฉากจะอยู่ที่ใด ตำแหน่งของ CM จะอยู่ที่เดียวกัน ตัวอย่างเช่นถ้าให้จุดกำเนิดทับกับมวล 2 กิโลกรัม จะได้ $x_{CM} = \frac{(2\,kg)(0\,m) + (4\,kg)(3\,m)}{(2kg) + (4kg)} = 2$ เมตร และ $y_{CM} = \frac{(2kg)(0m) + (4kg)(0m)}{(2kg) + (4kg)} = 0$ เมตร ซึ่ง CM เป็นจุดเดิมนั่นเอง

ข) มวล 2kg มีความเร็ว $-4\,\hat{i}\ m/s$ มวล 4kg มีความเร็ว $8\,\hat{i}\ m/s$

จากสมการ (9.4.2.2); $\vec{v}_{CM} = \frac{(2\,kg)(-4\hat{i}\ m/s) + (4\,kg)(8\hat{i}\ m/s)}{(2kg) + (4kg)} = 4\,\hat{i}\ m/s$

คือจุดศูนย์กลางมวลเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยความเร็ว 4 เมตรต่อวินาที

ค) เรารู้ว่าความเร่ง $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ อนุภาคตัวแรกเคลื่อนที่ไปทางซ้ายและเร็วขึ้นเรื่อยๆ คือ $\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ มีทิศไปทางซ้าย ทิศของความเร่งจึงชี้ไปทางซ้าย ดังนั้นความเร่งของอนุภาคตัวแรก $-2\,\hat{i}\ m/s^2$

(นักศึกษาพึงระลึกว่าความเร่งติดลบไม่ได้หมายความว่ามันช้าลง แต่เครื่องหมายลบเป็นการบอกทิศเท่านั้น)

อนุภาคตัวที่สองเคลื่อนเคลื่อนที่ไปทางขวาและช้าลงเรื่อยๆ คือ $\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ มีทิศไปทางซ้าย ทิศของความเร่งจึงชี้ไปทางซ้าย ดังนั้นความเร่งของอนุภาคตัวที่สอง $-1\,\hat{i}\ m/s^2$

จากสมการ (9.4.2.3); $\vec{a}_{CM} = \frac{(2\,kg)(-2\hat{i}\ m/s^2) + (4\,kg)(-1\hat{i}\ m/s^2)}{(2kg) + (4kg)} = -1.33\hat{i}\ m/s^2$

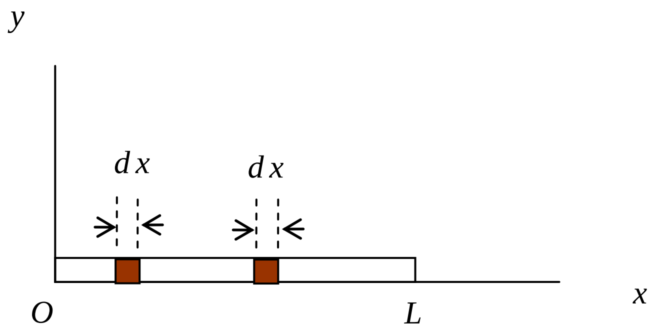
คือความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลมีทิศชี้ไปทางซ้าย โดยมีขนาด 1.33 เมตรต่อวินาที^{2}

ตัวอย่างที่ 9.4.2.2 จงหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของคานสม่ำเสมอยาว L เมตร

<u>วิธีทำ</u> อันที่จริงนักศึกษารู้มานานแล้วว่าจุดศูนย์กลางมวลของคานสม่ำเสมออยู่ที่กึ่งกลางคาน อย่างไรก็ตามในที่นี้จะคำนวณให้ดูว่าทำไมมันจึงอยู่กึ่งกลางคาน

เนื่องจากคานสม่ำเสมอเราจึงไม่ต้องสนใจพื้นที่หน้าตัดของคาน สนใจแต่ความยาว สมมติให้คานมีมวล M กิโลกรัม

สร้างพิกัดฉากโดยให้คานอยู่ในแนวแกน x ปลายด้านซ้ายของคานอยู่ที่จุดกำเนิด ดังรูป ต.ย. 9.4.2.2



รูป ต.ย.9.4.2.2

ความหนาแน่น(เชิงความยาว)ของคานคือ $\dfrac{M}{L}$ กิโลกรัมต่อเมตร

จากสมการ (9.4.2.4) เมื่อดูแนวแกน x จะได้ว่า

$$x_{CM} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} \qquad (1)$$

ในสมการ(1) นี้ dm (กิโลกรัม) คือมวลของส่วยย่อยของคาน ส่วน x (เมตร) คือระยะทางตามแนวแกน x ของ dm

ในรูป ต.ย.9.4.2.2 จินตนาการดูจะเห็นว่าคานประกอบไปด้วยส่วนย่อยยาว dx เมตรเรียงชิดติดกันเต็มไปหมด โดยส่วนย่อยเหล่านี้อยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะทาง x (เมตร) มวลของส่วนย่อยเหล่านี้คือ dm ในรูป ต.ย.9.4.2.2 เขียนส่วนย่อยเป็นตัวอย่างให้ดู 2 ชิ้นจากจำนวนนับไม่ถ้วนชิ้น

จะเห็นว่า $dm = \frac{M}{L} dx$ กิโลกรัม

แทนในสมการ(1) จะได้ $x_{CM} = \frac{\int_0^L x \frac{M}{L}\, dx}{\int_0^L \frac{M}{L} dx}$ เมตร (2)

ในสมการ(2) นี้ เราอินทิเกรตเทียบกับ x ปริมาณใดก็ตามถ้าเมื่อ x เปลี่ยนแล้วปริมาณนั้นไม่เปลี่ยน ถือว่าปริมาณนั้นเป็นค่าคงที่ เราดึงออกนอกเครื่องหมายอินทิเกรตได้

ทั้ง M และ L นั้นเมื่อ x เปลี่ยน แต่ M และ L ไม่เปลี่ยน จึงดึงออกนอกเครื่องหมายอินทิเกรตได้ ดังนั้น

$$x_{CM} = \frac{\frac{M}{L}\int_0^L x\, dx}{\frac{M}{L}\int_0^L dx}$$

$$x_{CM} = \frac{\int_0^L x\, dx}{\int_0^L dx} = \frac{L^2/2}{L} \qquad (3)$$

$$x_{CM} = \frac{L}{2} \qquad \text{เมตร}$$

คือจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่กึ่งกลางคานดังที่เรารู้มาก่อนหน้าแล้วนั่นเอง

ในทำนองเดียวกันเราสามารถคำนวณได้ว่าจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกสม่ำเสมออยู่ที่กลางทรงกระบอก และจุดศูนย์กลางมวลของทรงกลมสม่ำเสมออยู่ที่กลางทรงกลม แต่การคำนวณจะซับซ้อนกว่านี้

9.4.3 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองกรณีระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง

เพื่อความชัดเจนจะใช้ระบบที่ประกอบด้วยอนุภาค 3 ตัว เป็นตัวอย่างในการพิจารณา

พิจารณาระบบที่ประกอบด้วย มวล m_1, m_2 และ m_3 ซึ่งมีเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ และ $\vec{r}_3$ ตามลำดับ

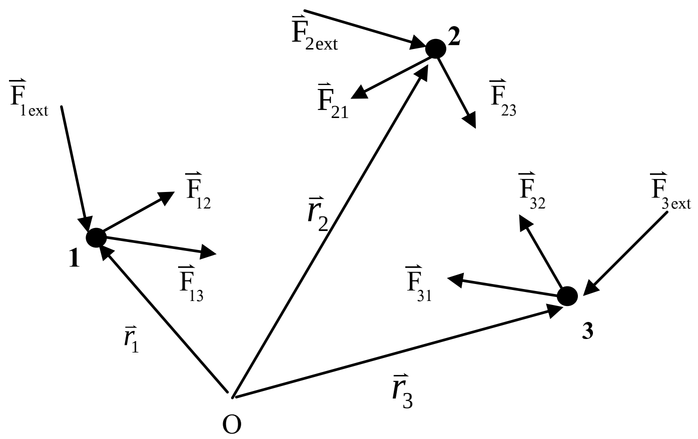
ให้ $\vec{F}_{1ext}$, $\vec{F}_{2ext}$ และ $\vec{F}_{3ext}$ เป็นแรงภายนอกระบบ(external forces)ที่กระทำต่อมวล m_1, m_2 และ m_3 ตามลำดับ

$\vec{F}_{12}$ และ $\vec{F}_{13}$ เป็นแรงภายในระบบที่มวล m_2 และ m_3 กระทำต่อ m_1

$\vec{F}_{21}$ และ $\vec{F}_{23}$ เป็นแรงภายในระบบที่มวล m_1 และ m_3 กระทำต่อ m_2

$\vec{F}_{31}$ และ $\vec{F}_{32}$ เป็นแรงภายในระบบที่มวล m_1 และ m_2 กระทำต่อ m_3

ดังรูป 9.4.3.1



รูป9.4.3.1

พิจารณามวล m_1 ; $$\vec{F}_{1ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 \quad (9.4.3.1)$$

พิจารณามวล m_2 ; $$\vec{F}_{2ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} = m_2\ddot{\vec{r}}_2 \quad (9.4.3.2)$$

พิจารณามวล m_3 ; $$\vec{F}_{3ext} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = m_3\ddot{\vec{r}}_3 \quad (9.4.3.3)$$

นำ (9.4.3.1) + (9.4.3.2) + (9.4.3.3) จะได้

$$\vec{F}_{1ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{2ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{3ext} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 + m_3\ddot{\vec{r}}_3$$

แต่ $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}$ และ $\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$

เพราะเป็นคู่กิริยา-ปฏิกิริยา

ดังนั้น $\vec{F}_{1ext} + \vec{F}_{2ext} + \vec{F}_{3ext} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 + m_3\ddot{\vec{r}}_3$ (9.4.3.4)

จากสมการ (9.4.2.3) ; $(m_1 + m_2 + m_3)\,\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 = m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 + m_3\ddot{\vec{r}}_3$

สมการ(9.4.3.4) จะเป็น $\vec{F}_{1ext} + \vec{F}_{2ext} + \vec{F}_{3ext} = (m_1 + m_2 + m_3)\,\vec{a}_{CM}$

แต่ $m_1 + m_2 + m_3$ คือมวลของระบบทั้งหมด เราให้เป็น M

ดังนั้น $\vec{F}_{1ext} + \vec{F}_{2ext} + \vec{F}_{3ext} = M\,\vec{a}_{CM}$

กรณีระบบอนุภาคที่มีอนุภาคมากกว่า 3 ตัว ก็จะได้ในทำนองเดียวกัน ว่า

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\,\vec{a}_{CM} \qquad (9.4.3.5)\ *$$

กล่าวคือ <u>แรงลัพธ์ของแรงภายนอกระบบ เท่ากับมวลทั้งหมดของระบบคูณด้วยความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล</u>

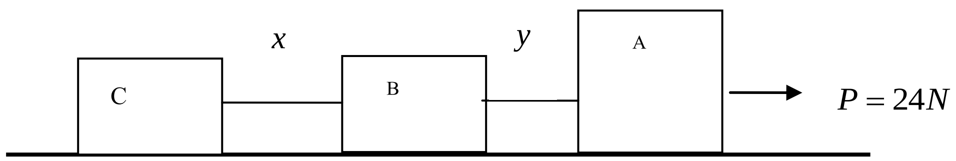
ในกรณีวัตถุแข็งเกร็ง สมการ (9.4.3.5) ยังคงเป็นจริง เพราะวัตถุแข็งเกร็งคือระบบอนุภาคที่สมาชิกของระบบอยู่เรียงชิดติดกันอย่างต่อเนื่อง

สมการ (9.4.3.5) คือ กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน ในกรณีของระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็งนั่นเอง ข้อควรระลึกก็คล้ายๆกับกรณีอนุภาค คือ<u>แรงต้องเป็นแรงจริงและความเร่งต้องอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย</u>

นักศึกษาจะเห็นว่ารูปสมการ (9.4.3.5) คล้าย ๆ กับสมการ(9.3) $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$ กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองในกรณีของอนุภาคตัวเดียว ในทางปฏิบัติมักใช้สมการ (9.4.3.5) ในลักษณะขององค์ประกอบของแรงลัพธ์และองค์ประกอบของความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลในแนวที่เหมาะสม คล้ายๆกับกรณีอนุภาคตัวเดียว นอกจากนี้ความเป็นอิสระเชิงเส้นก็จะคล้ายๆกันคือ สำหรับระบบๆหนึ่งเราสามารถเขียนสมการที่เป็นอิสระเชิงเส้นได้ไม่เกิน 3 สมการ

ตัวอย่างที่9.4.3.1 เราจะใช้ตัวอย่างที่ 9.3.3.3 ในหัวข้อ 9.3.3 มาเป็นตัวอย่างอีก

มวล A , B และ C ขนาด 3 , 2 และ 1 กิโลกรัมตามลำดับ ผูกติดกันด้วยเชือกเบา x และ y เมื่อออกแรง P = 24 นิวตัน กระทำต่อมวล A ดังรูป ต.ย.9.4.3.1 ก. จงหาแรงตึงเชือก x และ y ถ้าพื้นเป็นพื้นลื่น



รูป ต.ย.9.4.3.1ก.

วิธีทำ ใช้ผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย
ตำแหน่งของศูนย์กลางมวลอยู่ไหนไม่สำคัญ เนื่องจากมวลทุกก้อนมีความเร่ง a ทิศไปทางขวา
ความเร่งของศูนย์กลางมวล a_{CM} จึงเท่ากับ a ทิศไปทางขวาเช่นกัน
ขั้นแรก เลือกกล่อง A,B,C เชือก x เชือก y รวมกันเป็นระบบ
แรงที่เชือก x กระทำต่อ C แรงที่ C กระทำต่อเชือก x เป็นแรงภายในระบบ
แรงที่เชือก x กระทำต่อ B แรงที่ B กระทำต่อเชือก x เป็นแรงภายในระบบ
แรงที่เชือก y กระทำต่อ B แรงที่ B กระทำต่อเชือก y เป็นแรงภายในระบบ
แรงที่เชือก y กระทำต่อ A แรงที่ A กระทำต่อเชือก y เป็นแรงภายในระบบ

แรงภายนอกระบบแบบที่ต้องสัมผัส ระบบสัมผัสกับพื้นและแรง P
พื้นออกแรง $N_A + N_B + N_C$ ในแนวดิ่งทิศชี้ขึ้น กระทำต่อระบบ (ทำต่อกล่อง A,B และ C)
แรง P ออกแรง 24 นิวตัน ในแนวระดับทิศไปทางขวากระทำต่อระบบ (ทำต่อกล่อง A)
แรงภายนอกระบบแบบที่ไม่ต้องสัมผัส
แรงดึงดูดของโลก 3g+2g+1g = 6g ทิศชี้ลง

ดูในแนวระดับ แรงภายนอกระบบมีแรงเดียวคือ P

$$24N = (3kg + 2kg + 1kg)a$$

เป็นสมการที่มีตัวไม่รู้ค่าเพียงตัวเดียวคือ a
จะได้ $a = 4\, m/s^2$ ทิศไปทางขวา
ในแนวอื่นๆเช่นในแนวดิ่ง เราจะไม่สนใจเพราะโจทย์ไม่ได้ถาม

<u>ขั้นที่สอง</u> จะเลือกกล่อง A เป็นระบบ (เลือกอย่างอื่นก็ได้ เช่นเลือก B,C และเชือก x รวมกันเป็นระบบ)

<u>แรงภายนอกระบบแบบที่ต้องสัมผัส</u> ระบบสัมผัสกับพื้น แรง P และเชือก y

พื้นออกแรง N_A ในแนวดิ่งทิศชี้ขึ้น กระทำต่อระบบ

แรง P ออกแรง 24 นิวตัน ในแนวระดับทิศไปทางขวากระทำต่อระบบ

เชือก y ออกแรง T_y ในแนวระดับทิศไปทางซ้ายกระทำต่อระบบ

<u>แรงภายนอกระบบแบบที่ไม่ต้องสัมผัส</u>

แรงดึงดูดของโลก 3g ทิศชี้ลง

ดูในแนวระดับ เนื่องจาก $a = 4\ m/s^2$ ทิศไปทางขวา

จะได้ $24N - T_y \quad = (3kg)(4m/s^2)$

เป็นสมการที่มีตัวไม่รู้ค่าเพียงตัวเดียวคือ T_y

จะได้ $T_y = 12$ นิวตัน

<u>ขั้นที่สาม</u> จะเลือกกล่อง C เป็นระบบ (เลือกอย่างอื่นก็ได้)

<u>แรงภายนอกระบบแบบที่ต้องสัมผัส</u> ระบบสัมผัสกับพื้น และเชือก x

พื้นออกแรง N_C ในแนวดิ่งทิศชี้ขึ้น กระทำต่อระบบ

เชือก x ออกแรง T_x ในแนวระดับทิศไปทางขวากระทำต่อระบบ

<u>แรงภายนอกระบบแบบที่ไม่ต้องสัมผัส</u>

แรงดึงดูดของโลก 1g ทิศชี้ลง

ดูในแนวระดับ เนื่องจาก $a = 4\ m/s^2$ ทิศไปทางขวา

จะได้ $T_x \quad = (1kg)(4m/s^2)$

$T_x = 4$ นิวตัน

คำตอบจะเหมือนกับคำตอบในตัวอย่างที่ 9.3.3.3 ในหัวข้อ 9.3.3

<u>หมายเหตุ</u> ในแนวระดับ

ถ้าเราดู C เป็นระบบจะได้ $T_x = 1a$ (1)

ถ้าดู B เป็นระบบจะได้ $T_y - T_x = 2a$ (2)

ถ้าดู A เป็นระบบจะได้ $24 - T_y = 3a$ (3)

ถ้าดู A,B,C เชือก x เชือก y รวมกันเป็นระบบ จะได้ $24 = (3+2+1)a$ (4)

สมการ(1) มีข่าวสารการเคลื่อนที่ของ C ในแนวระดับ

สมการ(2) มีข่าวสารการเคลื่อนที่ของ B ในแนวระดับ

สมการ(3) มีข่าวสารการเคลื่อนที่ของ A ในแนวระดับ

สมการ(4) มีข่าวสารการเคลื่อนที่ของ A และ B และ C ในแนวระดับ นักศึกษาจะเห็นว่า สมการ (4)=(1)+(2)+(3)

ในการหาความเร่ง a นั้น

วิธีแรก เราอาจใช้สมการ (1) และ (2) และ(3) หาความเร่ง a

วิธีที่สอง เราอาจใช้สมการ (4) สมการเดียว หาความเร่ง a

เราหาความเร่ง a จากทั้งสองวิธีได้ เพราะแต่ละวิธีมีข่าวสารการเคลื่อนที่ในแนวระดับของทั้ง A และ B และ C ครบ

เป็นไปไม่ได้ที่เราจะมีข่าวสารการเคลื่อนที่เพียงแค่ของ A และ B โดยไม่มีของ C แต่หาความเร่ง a ได้

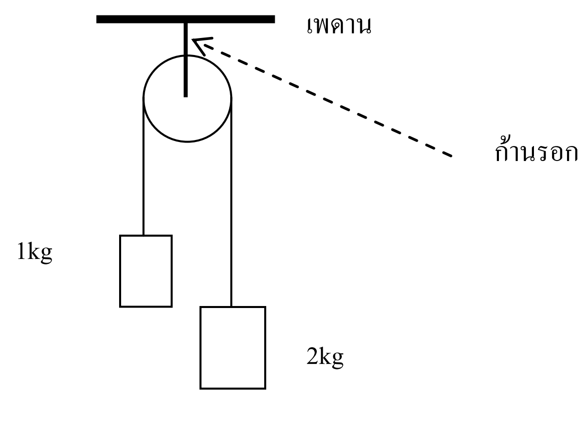
หรือเป็นไปไม่ได้ที่เราจะมีข่าวสารการเคลื่อนที่เพียงแค่ของ B และ C โดยไม่มีของ A แต่หาความเร่ง a ได้

สมมติในโจทย์บางข้อมีอุปกรณ์บางอย่างหมุน ตัวอย่างเช่นมีรอกที่ไม่ใช่รอกเบา ผิวของรอกที่สัมผัสกับเชือกเป็นผิวฝืด รอกเป็นรอกที่หมุนได้คล่อง นอกจากข่าวสารของการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่แล้ว เรายังต้องมีข่าวสารของการหมุนของรอกด้วยจึงจะแก้ปัญหาได้ สมการที่นำข่าวสารของการหมุนมักเป็นสมการ $\tau = I\alpha$ ดังที่นักศึกษาจะเห็นในตัวอย่างที่ 9.4.3.2

ตัวอย่างที่9.4.3.2 เชือกเบาผูกติดมวล 1 และ 2 กิโลรัม คล้องผ่านรอกที่หมุนได้คล่องมวล 3 กิโลกรัม โดยก้านรอกยึดติดกับเพดาน ดังรูป ต.ย.9.4.3.2ก จงหาแรงที่เพดานทำต่อก้านรอก ถ้า

ก) ผิวรอกลื่น ข) ผิวรอกฝืด

(กำหนดให้ โมเมนต์ความเฉื่อยของรอก $I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2$)



รูป ต.ย.9.4.3.2

<u>วิธีทำ</u> นักศึกษาควรรู้ว่า<u>เชือกเบา</u>ที่เป็น<u>เชือกเส้นเดียวกัน</u> และ<u>ไม่พาดผ่านผิวฝืด</u> แรงตึงเชือกจะเท่ากันตลอดทั้งเส้น

ก) ผิวรอกลื่น คือเชือกพาดผ่านผิวลื่น แรงตึงเชือกเท่ากันทั้งเส้น ให้ T เป็นแรงตึงเชือก

เนื่องจากผิวรอกลื่น เชือกจะไถลไปบนผิวรอกโดยรอกไม่หมุน

ให้ a ทิศชี้ลง เป็นความเร่งของมวล 2 kg <u>ต่อจากนี้ไปเราจะเขียนสั้นๆเช่นนี้โดยไม่บอกว่าความเร่ง a อ้างอิงกับผิวโลก</u>

ความเร่งของมวล 1 kg ก็จะเป็น a แต่ทิศชี้ขึ้น

ดูมวล 1 kg เป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง $T-1(9.8)=1a$ (1)

(ความหมายใน "ดูมวล 1 kg เป็นระบบ" นั้นนักศึกษาจะต้องจินตนาการว่ามวล 1 kg สัมผัสกับอะไรเพื่อหาแรงภายนอกระบบแบบที่ต้องสัมผัส จากนั้นก็หาแรงที่ไม่ต้องสัมผัส ต่อจากนี้ไปถ้านักศึกษาเจอคำว่า ดูอะไรก็ตามเป็นระบบ นักศึกษาต้องจินตนาการเองว่าระบบสัมผัสกับอะไรเพื่อหาแรงภายนอกระบบแบบที่ต้องสัมผัส จากนั้นก็หาแรงที่ไม่ต้องสัมผัส)

สมการ (1) มีตัวไม่รู้ค่า 2 ตัวคือ T และ a จำนวนสมการยังไม่พอ

ดูมวล 2 kg เป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง $2(9.8)-T=2a$ (2)

สมการ (1) และ (2) มีตัวไม่รู้ค่า 2 ตัวคือ T และ a จำนวนสมการพอแล้ว แก้สมการได้

$$a=3.27\ m/s^2 \quad ; T=13.07\ N$$

ให้ R เป็นแรง(ทิศชี้ขึ้น) ที่เพดานดึงด้านรอก

ดูรอกเป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง จุดศูนย์กลางมวลของรอกอยู่นิ่ง

ดังนั้น $R-3(9.8)-13.07-13.07=0$

$R=55.54\ N$ <u>ตอบ</u>

<u>ตรวจสอบคำตอบ</u> ดูรอก มวล 1 kg มวล 2 kg และเชือก รวมกันเป็นระบบ

แรงภายนอกระบบมี R ทิศชี้ขึ้น และแรงดึงดูดของโลก (1+2+3) 9.8 นิวตัน ทิศชี้ลง

จุดศูนย์กลางมวลมีความเร่งทิศชี้ลง $a_{CM} = \dfrac{(2kg)(3.27m/s^2)-(1kg)(3.27m/s^2)+(3kg)(0m/s^2)}{(2kg)+(1kg)+(3kg)}$

$$a_{CM} = \frac{3.27}{3} \quad m/s^2 \qquad \text{ทิศชี้ลง}$$

นักศึกษาพึงระลึกว่าคำว่า “ทิศชี้ลง” ในที่นี้นั้นเป็นเพราะเราเขียน

$$a_{CM} = \frac{(2kg)(3.27m/s^2)-(1kg)(3.27m/s^2)+(3kg)(0m/s^2)}{(2kg)+(1kg)+(3kg)}$$

ถ้าเราเขียน $a_{CM} = \dfrac{(1kg)(3.27m/s^2)-(2kg)(3.27m/s^2)+(3kg)(0m/s^2)}{(2kg)+(1kg)+(3kg)}$

ก็ต้องเปลี่ยนคำพูดเป็น “ทิศชี้ขึ้น” ซึ่งจะเห็นว่าค่าออกมาติดลบทำให้ทิศจริงๆคือชี้ลง

จาก $$\sum \vec{F}_{ext} = Ma_{CM} \qquad (3)$$

ดูทางซ้ายมือของสมการ(3) $(1kg+2kg+3kg)(9.8m/s^2)-55.54\,N$ = 3.26 นิวตัน

ดูทางขวามือของสมการ(3) $(1kg+2kg+3kg)(\frac{3.27}{3}m/s^2)$ = 3.27 นิวตัน

ทางซ้ายกับทางขวาต่างกันเล็กน้อยเพราะการปัดทศนิยม แต่จริงๆแล้วเท่ากันแสดงว่าคำตอบที่เราคำนวณมาน่าจะถูก

ข) ผิวรอกฝืด รอกหมุนได้คล่อง นักศึกษาต้องตีความเอาเองว่าความหมายในโจทย์คือเชือกไม่ไถลไปบนผิวรอก

แม้เชือกเป็นเชือกเบาและเป็นเชือกเส้นเดียวกัน แต่พาดผ่านผิวรอกซึ่งเป็นผิวฝืด แรงตึงเชือกจึงไม่เท่ากันทั้งเส้น

ให้ T_1 เป็นแรงตึงเชือกส่วนที่แตะกับมวล 1 kg

และ T_2 เป็นแรงตึงเชือกส่วนที่แตะกับมวล 2 kg

ดูมวล 1 kg เป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง $T_1 - 1(9.8) = 1a$ (4)

สมการ (1) มีตัวไม่รู้ค่า 2 ตัวคือ T_1 และ a จำนวนสมการยังไม่พอ

ดูมวล 2 kg เป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง $2(9.8) - T_2 = 2a$ (5)

สมการ (4) และ (5) มีตัวไม่รู้ค่า 3 ตัวคือ T_1, T_2 และ a จำนวนสมการยังไม่พอ

ดูการหมุนของรอก จาก $\tau = I\,\alpha$

จะได้ $$T_2\,R - T_1 R = \left(\frac{1}{2}(3kg)R^2\right)\alpha \qquad (6)$$

เมื่อ R คือรัศมีของรอก

(นักศึกษาที่ไม่เข้าใจอ่านเพิ่มเติมได้ใน "การหมุนในระนาบ" ที่เว็บไซต์ของภาควิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศิลปากร)

สมการ (4) ,(5) และ (6) มีตัวไม่รู้ค่า 4 ตัวคือ T_1, T_2, a และ α จำนวนสมการยังไม่พอ

ในกรณีที่เชือกไม่มีการไถลบนผิวรอก เราจะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งเชิงมุม α ของรอก และความเร่งเชิงเส้น a ของเชือก(หรือมวล) ดังนี้

$$a = \alpha\, R \qquad (7)$$

สมการ (4) ,(5) , (6) และ (7) มีตัวไม่รู้ค่า 4 ตัวคือ T_1, T_2, a และ α จำนวนสมการพอแล้ว แก้สมการได้

(รัศมี R จะตัดกันไป)

$$a = 2.18\, m/s^2 \quad ; T_1 = 11.98\, N ; T_2 = 15.24\, N$$

ให้ R เป็นแรง(ทิศชี้ขึ้น) ที่เพดานดึงด้านรอก

ดูรอกเป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง จุดศูนย์กลางมวลของรอกอยู่นิ่ง ; $R - 3(9.8) - 11.98 - 15.24 = 0$

$\therefore R = 56.62 \quad N$ ตอบ

<u>ตรวจสอบคำตอบ</u> ขอทบทวนก่อนสมการ (9.4.2.3 a) เสียก่อน นักศึกษาจะเห็นว่าในกรณีของรอกซึ่งตำแหน่งต่างๆบนรอกมีความเร่งไม่เท่ากันแต่เราคิดได้คล้ายกับว่ามวลของรอกทั้งหมดไปอัดอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล โดยจุดศูนย์กลางมวลของรอกมีความเร่งเป็นศูนย์

ดูรอก มวล 1 kg มวล 2 kg และเชือก รวมกันเป็นระบบ

แรงภายนอกระบบมี R ทิศชี้ขึ้น และ (1+2+3) 9.8 นิวตัน ทิศชี้ลง

จุดศูนย์กลางมวลมีความเร่งทิศชี้ลง $a_{CM} = \dfrac{(2kg)(2.18m/s^2)-(1kg)(2.18m/s^2)+(3kg)(0m/s^2)}{(2kg)+(1kg)+(3kg)}$

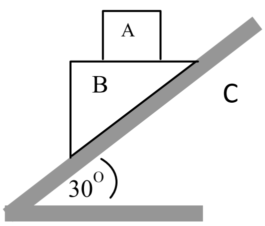
จาก $$\sum \vec{F}_{ext} = Ma_{CM} \qquad (9.4.3.5)$$

ดูทางซ้ายมือของสมการ(9.4.3.5) ; $(1kg+2kg+3kg)(9.8m/s^2)-56.62\ N = 2.18$ นิวตัน

ดูทางขวามือ $(1kg+2kg+3kg)(\dfrac{2.18}{3}m/s^2) = 2.18$ นิวตัน

ทางซ้ายกับทางขวาเท่ากัน แสดงว่าคำตอบที่เราคำนวณมาน่าจะถูก

ตัวอย่างที่ 9.4.3.3 กล่อง A มวล 6 กิโลกรัม วางบนลิ่ม B มวล 10 กิโลกรัม ซึ่งวางบนพื้นเอียง C ดังรูป ต.ย. 9.4.3.3ก ถ้าผิวสัมผัสทุกผิวเป็นผิวลื่น จงหา



รูป ต.ย.9.4.3.3ก.

ก) ความเร่งของลิ่ม B

ข) แรงที่ลิ่มกระทำต่อกล่อง A

ค) แรงที่พื้นเอียงกระทำต่อลิ่ม

ง) ความเร่งของกล่อง A สัมพัทธ์กับลิ่ม B

<u>วิธีทำ</u> สมมติเมื่อเริ่มต้นเราจับลิ่ม B ให้อยู่นิ่ง โดยกล่อง A อยู่นิ่งด้วย จากนั้นปล่อยมือ เมื่อลิ่ม B ไถลลงมาตามพื้นเอียง ผู้สังเกตบนลิ่ม B จะเห็นกล่อง A ไถลไปทางขวา ทั้งนี้เพราะผิวสัมผัสระหว่างกล่อง A และลิ่ม B เป็นผิวลื่น จึงไม่มีแรงในแนวระดับทำต่อกล่อง A ตำแหน่งในแนวระดับ(เทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย)

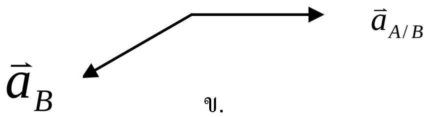
ของกล่อง A จะอยู่ที่เดิม แต่ตำแหน่งในแนวระดับ(เทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย) ของลิ่ม B เลื่อนไปทางซ้าย ดังนั้นผู้สังเกตบนลิ่ม B จะเห็นกล่อง A ไถลในแนวระดับไปทางขวา ให้ $\vec{a}_{A/B}$ เป็นความเร่งของกล่อง A สัมพัทธ์กับลิ่ม B ดังนั้น $\vec{a}_{A/B}$ จะอยู่ในแนวระดับและมีทิศชี้ไปทางขวา

ให้ $\vec{a}_B$ เป็นความเร่งของลิ่มเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย ทิศของ $\vec{a}_B$ จะมีทิศลงมาตามพื้นเอียง

เนื่องจาก A เคลื่อนที่ไปบน B ความเร่งของ A อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย จึงเท่ากับ $\vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$ คือ

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \qquad (1)$$

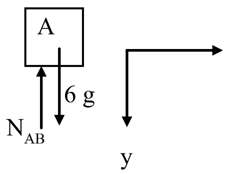
อย่างไรก็ตามเราจะไม่บวก $\vec{a}_B$ กับ $\vec{a}_{A/B}$ เพื่อให้ได้ $\vec{a}_A$ ออกมา เพราะไม่สะดวกในการคำนวณ แต่จะเขียนเป็นผังดังรูป ข.



ข.

<u>ดูกล่อง A เป็นระบบ</u>

แรงที่กระทำต่อกล่อง A แสดงดังรูป ค. ซึ่งประกอบ ด้วย



ค.

1.แรงที่ลิ่ม B กระทำต่อกล่อง A เนื่องจากเป็นผิวลื่น จึงมีเฉพาะแรงตั้งฉาก N_{AB} ทิศชี้ขึ้น

2. แรงโน้มถ่วงขนาด 6(9.8) = 58.8 นิวตัน ทิศชี้ลง

ให้ a_{Ay} คือความเร่งของกล่อง A ในแนวดิ่ง ซึ่งเท่ากับความเร่งในแนวดิ่งของลิ่ม B เพราะกล่องอยู่บนลิ่มตลอด ไม่ได้ลอยพ้นผิวลิ่ม

จากรูป ข. จะได้ $a_{Ay} = a_B \cos 60^0$ ทิศชี้ลง ดังนั้น ในแนวดิ่งจะได้ว่า

$$58.8 - N_{AB} = 6 a_B \cos 60^0 \qquad (2)$$

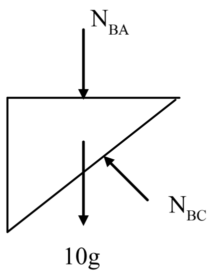
สมการ (2) มีตัวไม่รู้ค่า 2 ตัว คือ N_{AB} และ a_B จำนวนสมการยังไม่พอ เราจะเปลี่ยนแนว

ในแนวระดับไม่มีแรงกระทำต่อกล่อง A เพราะผิวกล่องเป็นผิวลื่น ความเร่งในแนวระดับเทียบกรอบอ้างอิงเฉื่อยจึงมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากรูป ข. จะได้ว่า

$$-a_B \sin 60^0 + a_{A/B} = 0 \qquad (3)$$

เรารู้ว่าสมการ(2) และ(3) เป็นอิสระต่อกัน เพราะมาจากคนละแนว สมการ (2) และ (3) มีตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว คือ N_{AB} , a_B และ $a_{A/B}$ จำนวนสมการยังไม่พอ ถ้าเราจะดูในแนวอื่นอีก เช่นในแนวตามพื้นเอียง ก็ไม่มีประโยชน์เพราะจะได้สมการที่ไม่เป็นอิสระกับสมการ(2) และ(3) เราจึงจะเปลี่ยนระบบเป็น B

<u>ดูลิ่ม B เป็นระบบ</u>



ง.

แรงที่กระทำต่อลิ่ม B แสดงดังรูป ง. ซึ่งประกอบด้วย

1. แรง N_{BA} ที่กล่อง A กดลิ่ม B เนื่องจาก N_{BA} เป็นแรงปฏิกิริยาของ N_{AB} ดังนั้นจึงมีขนาดเท่ากับ N_{AB} แต่ทิศชี้ลง

2.แรง N_{BC} ที่พื้นเอียงกระทำต่อลิ่ม เนื่องจากผิวลื่นจึงมีทิศตั้งฉากกับผิวพื้นเอียง

3. แรงโน้มถ่วง 10(9.8) = 98 นิวตัน ทิศชี้ลง

พิจารณาในแนวดิ่ง จากรูป ข. ความเร่งในแนวนี้ของลิ่ม B เท่ากับ $a_B \cos 60^0$ ทิศชี้ลง ดังนั้น

$$98 + N_{AB} - N_{BC} \sin 60^0 = 10\, a_B \cos 60^0 \qquad (4)$$

สมการ (2) (3) และ (4) มีตัวไม่รู้ค่า 4 ตัว คือ N_{AB} , a_B , $a_{A/B}$ และ N_{BC} จำนวนสมการยังไม่พอ เราจะเปลี่ยนแนว

ดูในแนวระดับ ความเร่งในแนวนี้ของลิ่ม B เท่ากับ $a_B \sin 60^0$ ทิศไปทางซ้าย ดังนั้น

$$N_{BC} \cos 60^o = 10\, a_B \sin 60^0 \qquad (5)$$

เรารู้ว่าสมการ(4) และ(5) เป็นอิสระต่อกัน เพราะมาจากคนละแนว และยังรู้อีกว่า สมการ (2) (3) (4) และ (5) ต่างก็เป็นอิสระต่อกัน เพราะสมการ (2) และ (3) มีข่าวสารของ A ส่วนสมการ(4) และ (5) มี

ข่าวสารของ B จึงเป็นข่าวสารที่ไม่ซ้ำกัน เนื่องจากสมการ (2) (3) (4) และ (5) มีตัวไม่รู้ค่า 4 ตัว คือ N_{AB}, a_B , $a_{A/B}$ และ N_{BC} จำนวนสมการพอแล้ว แก้สมการได้ดังนี้

ความเร่งของลิ่ม B คือ a_B = 6.82 เมตร/วินาที ^{2} <u>คำตอบข้อ ก</u>

แรงที่ลิ่มกระทำต่อกล่อง A คือ N_{AB} = 38.34 นิวตัน <u>คำตอบข้อ ข</u>

แรงที่พื้นเอียงกระทำต่อลิ่ม คือ N_{BC} = 118.12 นิวตัน <u>คำตอบข้อ ค</u>

ความเร่งของกล่อง A สัมพัทธ์กับลิ่ม B คือ $a_{A/B}$ = 5.91 เมตร/วินาที ^{2} <u>คำตอบข้อ ง</u>

<u>ตรวจสอบคำตอบ</u> ดูทั้ง A และ B รวมกันเป็นระบบ
แรงภายนอกระบบประกอบด้วย
1. แรง N_{BC} ที่พื้นเอียงกระทำ ทิศตั้งฉากกับพื้นเอียง
2. แรงโน้มถ่วง $16g$ ทิศชี้ลง

เนื่องจาก A วางอยู่บน B ความเร่งในแนวดิ่งของ A และ B จึงเท่ากัน คือ $a_B \cos 60^0$ ทิศชี้ลง ดังนั้นความเร่งในแนวดิ่งของจุดศูนย์กลางมวลจึงเท่ากับ $a_B \cos 60^0$ ทิศชี้ลง ด้วย

ดูในแนวดิ่ง $16g - N_{BC}\cos 30^0 \quad = \quad 16 \; a_B \cos 60^0$

$$156.8 - \frac{\sqrt{3}}{2} N_{BC} \quad = \quad 8a_B \tag{6}$$

$$156.8 - \frac{\sqrt{3}}{2}(118.12) \quad = \quad 8\,(6.82)$$

$$54.50 \quad = \quad 54.40$$

ทางซ้ายและทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับต่างกันเล็กน้อย น่าจะมาจากการปัดทศนิยม

ในแนวระดับความเร่งของ A เป็นศูนย์ ความเร่งของ B คือ $a_B \cos 30^0$ ทิศไปทางซ้าย ดังนั้น ความเร่งในแนวระดับของจุดศูนย์กลางมวล = $\dfrac{10(a_B \cos 30^0) + 6(0)}{(10+6)} = \dfrac{10}{16} a_B \cos 30^0$ ทิศไปทางซ้าย

ดูในแนวระดับ $N_{BC} \sin 30^0 \quad = \quad 16\left(\dfrac{10}{16} a_B \cos 30^0\right)$ (7)

$$(118.12)\frac{1}{2} \quad = \quad 10(6.82)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$59.06 \quad = \quad 59.06$$

แสดงว่าคำตอบในข้อ ก-ง น่าจะถูก

ตัวอย่างที่ 9.4.3.4 โจทย์ในตัวอย่างที่ 9.4.3.3 แทนที่เราจะดูทั้ง A และ B รวมกันเป็นระบบเพื่อตรวจสอบคำตอบ เราอาจใช้หาคำตอบก็ได้ดังนี้

ดู A เป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง จากสมการ (2) ใน ต.ย. 9.4.3.3

$$58.8 - N_{AB} = 6a_B \cos 60^0 \qquad (2)$$

ดู A เป็นระบบ ดูในแนวระดับ จากสมการ (3) ใน ต.ย. 9.4.3.3

$$-a_B \sin 60^0 + a_{A/B} = 0 \qquad (3)$$

ดู B เป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง จากสมการ (4) ใน ต.ย. 9.4.3.3

$$98 + N_{AB} - N_{BC} \sin 60^0 \quad = \quad 10a_B \cos 60^0 \qquad (4)$$

ดู A และB รวมกันเป็นระบบ ดูในแนวระดับ จากสมการ (7) ใน ต.ย. 9.4.3.3

$$N_{BC} \sin 30^0 \quad = \quad 16\left(\frac{10}{16}a_B \cos 30^0\right) \qquad (7)$$

สมการ (2) (3) (4) และ (7) มีตัวไม่รู้ค่า 4 ตัว คือ N_{AB} , a_B , $a_{A/B}$ และ N_{BC} เมื่อแก้สมการจะได้คำตอบเดียวกับคำตอบในตัวอย่างที่ 9.4.3.3 คือ

ความเร่งของลิ่ม B คือ a_B = 6.82 เมตร/วินาที ^{2}

แรงที่ลิ่มกระทำต่อกล่อง A คือ N_{AB} = 38.34 นิวตัน

แรงที่พื้นเอียงกระทำต่อลิ่ม คือ N_{BC} = 118.12 นิวตัน

ความเร่งของกล่อง A สัมพัทธ์กับลิ่ม B คือ $a_{A/B}$ = 5.91 เมตร/วินาที ^{2}

แต่ถ้านักศึกษาเลือกดูดังนี้

ดู A เป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง จากสมการ (2) ใน ต.ย. 9.4.3.3

$$58.8 - N_{AB} = 6a_B \cos 60^0 \qquad (2)$$

ดู A เป็นระบบ ดูในแนวระดับ จากสมการ (3) ใน ต.ย. 9.4.3.3

$$-a_B \sin 60^0 + a_{A/B} = 0 \qquad (3)$$

ดู B เป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง จากสมการ (4) ใน ต.ย. 9.4.3.3

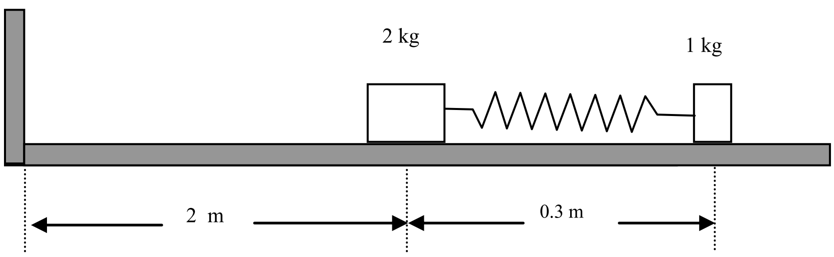
$$98 + N_{AB} - N_{BC} \sin 60^0 = 10a_B \cos 60^0 \qquad (4)$$

ดู A และB รวมกันเป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง จากสมการ (6) ใน ต.ย. 9.4.3.3

$$156.8 - \frac{\sqrt{3}}{2} N_{BC} = 8a_B \qquad (6)$$

แม้สมการ (2) (3)(4) และ(6) มีตัวไม่รู้ค่า 4 ตัว แต่เราไม่สามารถหาคำตอบได้ เพราะสมการทั้งสี่ไม่เป็นอิสระต่อกัน นักศึกษาจะเห็นว่าสมการ (6) ได้มาจาก สมการ (2) + สมการ(4) หรือพูดอีกอย่างคือ สมการ(2) มีข่าวสารการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของ A สมการ(4) มีข่าวสารการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของ B สมการ(6) มีข่าวสารการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของ A และ B ก็คือสมการ(6) ไม่ได้มีข่าวสารอะไรเพิ่มเติมจากสมการ(2) และ(4)

ตัวอย่างที่ 9.4.3.5 สปริงเบาติดมวล 2 และ 1 กิโลกรัม มวลทั้งสองอยู่นิ่งบนพื้นลื่นห่างกัน 0.3 เมตร และมวล 2 กิโลกรัมอยู่ห่างจากผนัง 2 เมตร ดังรูป ต.ย.9.4.3.5 จากนั้นเคาะมวล 2 กิโลกรัมไปทางขวา พบว่า ทันทีหลังการเคาะ มวล 2 กิโลกรัมมีความเร็ว 0.6 เมตรต่อวินาที ทิศไปทางขวา เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที พบว่ามวล 2 กิโลกรัมอยู่ห่างจากผนัง 2.42 เมตร จงหาว่าขณะนั้นมวล 1 กิโลกรัมอยู่ห่างจากผนังกี่เมตร



รูป ต.ย.9.4.3.5

<u>วิธีทำ</u> ดูมวลทั้งสองก้อนรวมทั้งสปริงรวมกันเป็นระบบ

การเคาะมวล 2 กิโลกรัมเป็นการให้ความเร็วต้นแก่มวล 2 กิโลกรัม ทันทีหลังเคาะมวล 2 กิโลกรัม มีความเร็ว 0.6 เมตรต่อวินาที ทิศไปทางขวา แต่มวล 1 กิโลกรัมยังอยู่นิ่งโดยกำลังจะขยับไปทางขวา นอกจากนี้นับจากเวลาทันทีหลังเคาะมีแต่พื้นที่สัมผัสกับระบบ(ค้อนที่เราใช้เคาะไม่ได้สัมผัสกับระบบแล้ว) แต่พื้นเป็นพื้นลื่นจึงไม่มีแรงภายนอกระบบในแนวระดับกระทำต่อระบบ ความเร็วในแนวระดับของจุดศูนย์กลางมวลจึงคงที่

เมื่อเริ่มต้นจุดศูนย์กลางมวลอยู่ห่างจากผนัง $= \dfrac{(2kg)(2m)+(1kg)(2.3m)}{(2kg+1kg)}$ = 2.1 เมตร

ทันทีหลังการเคาะความเร็วในแนวระดับของจุดศูนย์กลางมวล $= \dfrac{(2kg)(0.6m/s)+(1kg)(0)}{(2kg+1kg)} = 0.4m/s$

หลังการเคาะ ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลก็ยังคงเท่ากับ 0.4 เมตรต่อวินาที

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที จุดศูนย์กลางมวลขยับไปทางขวาจากเดิม 0.4 เมตร คืออยู่ห่างจากผนัง 2.5 เมตร

ให้ x เมตร เป็นระยะทางที่มวล 1 กิโลกรัมอยู่ห่างจากผนังเมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที

ดังนั้น $$2.5m = \frac{(2kg)(2.42m)+(1kg)(x\,m)}{(2kg+1kg)}$$

จะได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที มวล 1 กิโลกรัมอยู่ห่างจากผนัง 2.66 เมตร
