เรื่องเล่าจากครูฟิสิกส์แก่ๆ ตอนที่ 10 การดัดแปลงกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเพื่อใช้กับกรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล

4 กุมภาพันธ์ 2565

ในตอนที่ 10 นี้ นอกจากนักศึกษาครูฟิสิกส์แล้ว นักศึกษา วท.บ ฟิสิกส์ สามารถใช้เป็นพื้นฐานเรื่องกรอบอ้างอิงที่หมุน ซึ่งก็คือคนที่อยู่บนผิวโลกจะสังเกตเห็นวัตถุเคลื่อนที่อย่างไร เมื่อคิดผลการหมุนของโลก

กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองในกรณีของอนุภาค $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ และกรณีระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$ ที่ได้กล่าวมาในตอนที่ 9.3 และ 9.4 นั้น แรงต้องเป็นแรงจริง ความเร่งต้องสังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย แต่มันไม่ได้หมายความว่าผู้อยู่ในกรอบอ้างอิงที่มีความเร่งจะไม่สามารถใช้ประโยชน์จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สอง เราสามารถใช้ประโยชน์ได้ด้วยการดัดแปลงกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองอันเดิมให้ใช้ได้กับกรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง การดัดแปลงทำได้โดยการมองว่านอกจากแรงจริงแล้วยังมี “แรงเทียม” ทำต่อวัตถุอีกด้วย แรงเทียม(fictitious force หรือ pseudo force หรือ inertial force) เป็นแรงที่เกิดจากความรู้สึกของผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง เราไม่สามารถหาตัวผู้ออกแรงได้เพราะมันเกิดจากความรู้สึก มันจะโผล่ขึ้นมาในสมการที่เราดัดแปลงดังที่นักศึกษาจะได้เห็นในหัวข้อ 10.1 และ 10.2

กรอบอ้างอิงที่มีความเร่งที่เราสนใจจะมีสองประเภท ประเภทแรกเป็นกรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ในแนวตรงแบบมีความเร่ง ประเภทที่สองเป็นกรอบอ้างอิงที่หมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ กรอบอ้างอิงประเภทที่สองนี้เป็นกรอบอ้างอิงที่สำคัญ เพราะเราอยู่บนโลกที่หมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่

10.1 การดัดแปลงกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเพื่อใช้กับกรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ในแนวตรงและมีความเร่ง

สมมติว่ามีผู้สังเกตสองคน คือนายแดงและนางสาวปู นางสาวปูติดตรึงกับจุด O ซึ่งเป็นจุดกำเนิดของพิกัด xyz ที่อยู่นิ่ง นายแดงติดตรึงกับจุด O' ซึ่งเป็นจุดกำเนิดของพิกัด $x'y'z'$ ที่เคลื่อนที่ในแนวตรงโดยแกน $x'y'z'$ ไม่ได้หมุน เพื่อความสะดวกให้ $x'y'z'$ เคลื่อนที่ตามแนวแกน x ของพิกัด xyz

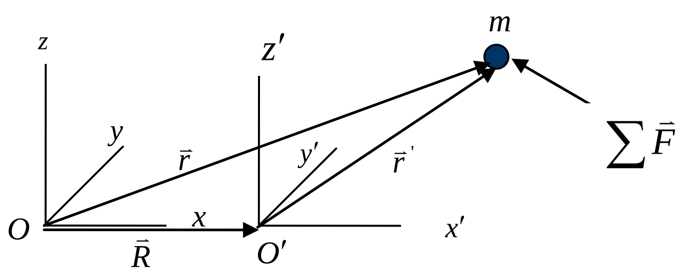
สมมติมีมวล m

ให้ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวล m อ้างอิงกับจุด O

$\vec{r}\,'$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวล m อ้างอิงกับจุด O'

$\vec{R}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด O' อ้างอิงกับจุด O

และสมมติว่ามวล m ถูกแรงจริง $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...$ กระทำ โดย $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = \sum \vec{F}$ ดังในรูป 10.1.1



รูป 10.1.1

จากรูป 10.1.1 จะเห็นว่า $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$ (10.1.1)

นางสาวปูซึ่งเป็นผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง(fixed) จะเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\vec{r}$ ดังนี้

$$\left(\frac{d\,\vec{r}}{d\,t}\right)_{fixed} = \left(\frac{d}{d\,t}(\vec{R} + \vec{r}\,')\right)_{fixed} = \left(\frac{d\,\vec{R}}{d\,t}\right)_{fixed} + \left(\frac{d\,\vec{r}\,'}{d\,t}\right)_{fixed} \tag{10.1.2}$$

เนื่องจาก $\vec{r} = x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$; $\vec{R} = R\,\hat{i}$ และ $\vec{r}\,' = x'\,\hat{i}' + y'\,\hat{j}' + z'\,\hat{k}'$

ดังนั้น $$\left(\frac{d}{d\,t}(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k})\right)_{fixed} = \left(\frac{d}{d\,t}(R\,\hat{i})\right)_{fixed} + \left(\frac{d}{d\,t}(x'\,\hat{i}' + y'\,\hat{j}' + z'\,\hat{k}')\right)_{fixed} \tag{10.1.3}$$

การหาอนุพันธ์ก็ทำตรงๆ ตัวอย่างเช่น ในการหาอนุพันธ์ของ $x'\,\hat{i}'$ เราก็มองว่าเป็นการหาอนุพันธ์ของผลคูณระหว่าง x' กับ $\hat{i}'$ ซึ่งจะได้ว่า $\left(\frac{d}{dt}(x'\,\hat{i}')\right)_{fixed} = \left(\frac{dx'}{dt}\right)_{fixed}\hat{i}' + x'\left(\frac{d\,\hat{i}'}{dt}\right)_{fixed}$

ความหมายเราก็ดูตรงๆ ตัวอย่างเช่น $\left(\frac{dx'}{dt}\right)_{fixed}$ หมายความว่าผู้สังเกตที่อยู่นิ่งจะเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ x' เป็นเท่าใด หรือ $\left(\frac{d\,\hat{i}'}{dt}\right)_{fixed}$ หมายความว่าผู้สังเกตที่อยู่นิ่งจะเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์หน่วย $\hat{i}'$ เป็นเท่าใด เป็นต้น

ในหัวข้อ 9.1.5.1 เรารู้ว่าผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเห็น $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ ไม่ขึ้นกับเวลา เพราะเขาติดไปกับแกน xyz ส่วน $\hat{i}', \hat{j}'$ และ $\hat{k}'$ นั้น เนื่องจาก $x'y'z'$ เคลื่อนที่ในแนวตรงโดยไม่มีการหมุนของแกน ผู้สังเกตที่อยู่นิ่งจึงเห็นทิศของ $\hat{i}', \hat{j}'$ และ $\hat{k}'$ ชี้ทิศเดิมตลอด ผู้สังเกตที่อยู่นิ่งจึงบอกว่า $\hat{i}', \hat{j}'$ และ $\hat{k}'$ ไม่ขึ้นกับเวลาเช่นเดียวกันกับ $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ คืออนุพันธ์ของเวกเตอร์หน่วยในสมการ(10.1.3) ทุกตัวจะเป็นศูนย์ ตัวอย่างเช่น $\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed} = 0$; $\left(\frac{d\,\hat{i}'}{dt}\right)_{fixed} = 0$ เป็นต้น

ดังนั้น สมการ(10.1.3) จะเป็น

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{fixed}\hat{i}+\left(\frac{dy}{dt}\right)_{fixed}\hat{j}+\left(\frac{dz}{dt}\right)_{fixed}\hat{k} = \left(\frac{d\,R}{d\,t}\right)_{fixed}\hat{i}+\left(\frac{dx'}{dt}\right)_{fixed}\hat{i}'+\left(\frac{dy'}{dt}\right)_{fixed}\hat{j}'+\left(\frac{dz'}{dt}\right)_{fixed}\hat{k}' \tag{10.1.4}$$

ในหัวข้อ 9.1.6.1 นักศึกษาได้เห็นแล้วว่าอนุพันธ์เทียบกับเวลาของสเกลาร์ ไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิง คือ

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)_{fixed}\hat{i}' = \left(\frac{dx'}{dt}\right)_{trans}\hat{i}' \;; \qquad \left(\frac{dy'}{dt}\right)_{fixed}\hat{j}' = \left(\frac{dy'}{dt}\right)_{trans}\hat{j}' ; \qquad \left(\frac{dz'}{dt}\right)_{fixed}\hat{k}' = \left(\frac{dz'}{dt}\right)_{trans}\hat{k}'$$

เมื่อ $\left(\frac{d}{dt}\right)_{fixed}$ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงสังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง คือผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบ xyz

$\left(\frac{d}{dt}\right)_{trans}$ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงสังเกตโดยผู้สังเกตที่เคลื่อนที่ คือผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบ $x'y'z'$

และเนื่องจาก $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{fixed}\hat{i}+\left(\frac{dy}{dt}\right)_{fixed}\hat{j}+\left(\frac{dz}{dt}\right)_{fixed}\hat{k}$ หมายถึงความเร็วของมวล m สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง เราให้เป็น $\vec{v}$

$\left(\frac{d\,R}{d\,t}\right)_{fixed}\hat{i}$ หมายถึงความเร็วของกรอบ $x'y'z'$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง เราให้เป็น $\vec{v}_{O'}$

$\left(\frac{dx'}{dt}\right)_{trans}\hat{i}'+\left(\frac{dy'}{dt}\right)_{trans}\hat{j}'+\left(\frac{dz'}{dt}\right)_{trans}\hat{k}'$ หมายถึงความเร็วของมวล m สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่ใน กรอบ $x'y'z'$ เราให้เป็น $\vec{v}'$

ดังนั้น สมการ (10.1.4) จะเป็น

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' \qquad (10.1.5)$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าหาอนุพันธ์สมการ (10.1.5) เทียบกับเวลา จะได้

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' \qquad (10.1.6)$$

เมื่อ $\vec{a}$ คือความเร่งของมวล m อ้างอิงกับผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง

$\vec{a}'$ คือความเร่งของมวล m อ้างอิงกับกรอบ $x'y'z'$

$\vec{a}_{O'}$ คือความเร่งของกรอบ $x'y'z'$ อ้างอิงกับผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง

คูณสมการ (10.1.6) ด้วย m จะได้ $m\vec{a} = m\vec{a}_{O'} + m\vec{a}'$ (10.1.7)

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองในตอนที่ 9.3 ; $m\vec{a} = \sum\vec{F}$ เมื่อ $\vec{a}$ เป็นความเร่งอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย และ $\sum\vec{F}$ คือแรงจริงทั้งหมดที่กระทำต่อมวล m ดังนั้น สมการ(10.1.7) จะเป็น

$$\sum\vec{F} = m\vec{a}_{O'} + m\vec{a}'$$

หรือ

$$m\vec{a}' = \sum\vec{F} - m\vec{a}_{O'} \qquad (10.1.8)^*$$

จากสมการ(10.1.8) นายแดงซึ่งเป็นผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ในแนวตรงด้วยความเร่ง $\vec{a}_{O'}$ จะรู้สึกว่ามวล m นอกจากจะมีแรงจริง $\sum\vec{F}$ กระทำแล้ว ยังคล้ายกับว่ามีแรง $-m\vec{a}_{O'}$ กระทำอีกด้วย แต่เนื่องจากหาตัวผู้ออกแรงไม่เจอ เราจึงเรียกพจน์ $-m\vec{a}_{O'}$ ว่า "แรงเทียม" พึงสังเกตว่าทิศของแรงเทียมตรงกันข้ามกับทิศของความเร่งของกรอบอ้างอิง

ถ้าจะบรรยายสมการ(10.1.8) เป็นคำพูดเพื่อให้จำหลักการได้ง่ายๆ ก็จะพูดได้ว่า

สำหรับกรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง มวลคูณความเร่ง เท่ากับ แรงจริง + แรงเทียม

โจทย์ที่เหมาะในการใช้แรงเทียมคือโจทย์ที่วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ไปบนอีกวัตถุหนึ่งที่มีความเร่ง อย่างไรก็ตามครูไม่ควรสอนการใช้แรงเทียมให้แก่นักเรียนมัธยมปลายที่ไม่ใช่โรงเรียนที่นักเรียนถนัดฟิสิกส์ เพราะอาจทำให้นักเรียนสับสน นักเรียนควรทำโจทย์โดยใช้แรงจริงและกรอบอ้างอิงเฉื่อย ซึ่งแม้อาจจะยาวกว่าแต่อยู่บนหลักการที่ตรงไปตรงมา ครูควรใช้แรงเทียมในการตรวจสอบคำตอบเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 10.1.1 ลิฟท์สูง 3 เมตร มีน็อตหลุดจากเพดานลิฟท์ จงหาเวลาที่น็อตหล่นจากเพดานถึงพื้นลิฟท์ถ้า

ก) ลิฟท์เคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่ง 2 เมตร/วินาที^{2} (คือเคลื่อนที่ขึ้นและเร็วขึ้นเรื่อยๆ)

ข) ลิฟท์เคลื่อนที่ลงด้วยความเร่ง 2 เมตร/วินาที^{2} (คือเคลื่อนที่ลงและเร็วขึ้นเรื่อยๆ)

วิธีทำ ให้น็อตมีมวล m

ก) วิธีที่ 1 จะใช้กรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง โดยใช้ลิฟท์เป็นกรอบอ้างอิง สมมติมีนายแดงอยู่ในลิฟท์

ขณะที่น็อตเริ่มหลุดนั้นนายแดงจะเห็นน็อตมีความเร็วต้นเป็นศูนย์

ขณะที่น็อตลอยอยู่ในอากาศ นายแดงจะเห็นแรงที่กระทำต่อน็อต ดังนี้

แรงจริง มีแรงดึงดูดของโลก mg นิวตัน ทิศชี้ลง

เนื่องจากลิฟท์มีความเร่ง มี 2 เมตร/วินาที^{2} ทิศชี้ขึ้น นายแดงจึงเห็นแรงเทียม $2m$ นิวตัน ทิศชี้ลง กระทำต่อน็อต

ให้ a' เป็นความเร่งของน็อต อ้างอิงกับนายแดง

ดูในแนวดิ่ง ให้ทิศชี้ลงเป็นบวก นายแดงจะเขียนสมการว่า $ma' = mg + 2m$

นายแดงจะเห็นความเร่งของน็อต $a' = 11.8\ m/s^2$ ทิศชี้ลง

เนื่องจากความเร่งคงที่ นายแดงใช้สูตร $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ ได้ โดยนายแดงเห็นระยะทางที่น็อตเคลื่อนที่เท่ากับความสูงของลิฟท์ คือ 3 เมตร

นายแดงแทนค่า ดังนี้ $3 = (0)t + \frac{1}{2}(11.8)t^2$

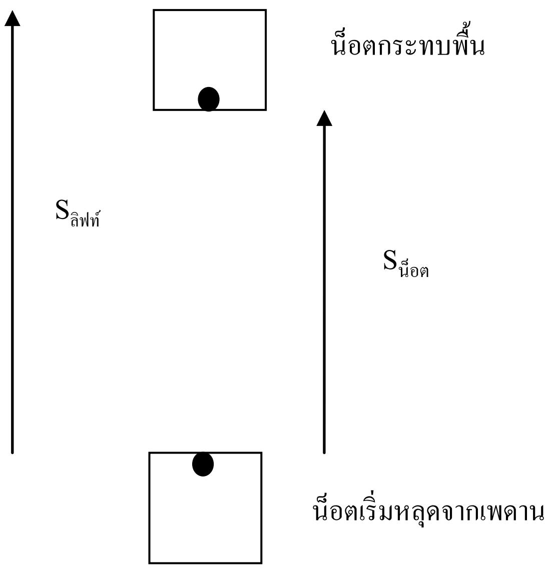
จะได้ $t = 0.71$ วินาที

<u>วิธีที่ 2 จะใช้กรอบอ้างอิงเฉื่อย</u> โดยใช้พื้นดินเป็นกรอบอ้างอิง สมมติมีนางสาวปูยืนอยู่ที่พื้นดิน

ขณะที่น็อตลอยอยู่ในอากาศ นางสาวปูเห็นแรงจริงแรงเดียวกระทำต่อน็อต คือแรงดึงดูดของโลก mg ทิศชี้ลง ดังนั้นนางสาวปูจะเห็นน็อตมีความเร่ง g ทิศชี้ลง

ขณะที่น็อตลอยอยู่ในอากาศ นางสาวปูเห็นลิฟท์มีความเร่ง 2 เมตร/วินาที^{2} ทิศชี้ขึ้น

เมื่อน็อตกระทบพื้นลิฟท์นั้น นางสาวปูจะเห็นระยะทางที่ลิฟท์เคลื่อนที่มากกว่าระยะทางที่น็อตเคลื่อนที่ 3 เมตร คือ $S_{\text{ลิฟท์}} - S_{\text{น็อต}} = 3$ เมตร ดังรูป ต.ย.10.1.1



รูป ต.ย.10.1.1

สมมติให้ความเร็วลิฟท์ขณะที่น็อตเริ่มหลุด เป็น u เมตร/วินาที ทิศชี้ขึ้น

ขณะที่น็อตเริ่มหลุดนั้นนางสาวปูจะเห็นทั้งลิฟท์และน็อตมีความเร็วต้นเป็น u เมตร/วินาที ทิศชี้ขึ้น

นางสาวปูเห็นระยะทางที่ลิฟท์เคลื่อนที่ $S_{\text{ลิฟท์}} = ut + \frac{1}{2}(2)t^2$ เมตร

และเห็นระยะทางที่น็อตเคลื่อนที่ $S_{\text{น็อต}} = ut - \frac{1}{2}(g)t^2$

เนื่องจาก $S_{\text{ลิฟท์}} - S_{\text{น็อต}} = 3$ เมตร ดังนั้น

$$t^2 + 4.9t^2 = 3$$

จะได้ $t = 0.71$ วินาที เหมือนกับวิธีที่ 1

นักศึกษาจะเห็นว่าแม้วิธีที่ 2 ฟิสิกส์จะตรงไปตรงมา แต่การคำนวณจะยาวกว่าวิธีที่ 1

ข) จะใช้กรอบอ้างอิงที่มีความเร่งเพียงอย่างเดียว การใช้กรอบอ้างอิงเฉื่อยนักศึกษาลองทำเอง

ขณะที่น็อตลอยอยู่ในอากาศ นายแดงจะเห็นแรงที่กระทำต่อน็อต ดังนี้

แรงจริง มีแรงดึงดูดของโลก $m\,g$ นิวตัน ทิศชี้ลง

เนื่องจากลิฟท์มีความเร่ง มี 2 เมตร/วินาที^{2} ทิศชี้ลง นายแดงจึงเห็นแรงเทียม $2\,m$ นิวตัน ทิศชี้ขึ้น กระทำต่อน็อต

นายแดงจะเขียนสมการว่า $m\,a' = m\,g - 2\,m$

นายแดงจะเห็นความเร่งของน็อต $a' = 7.8 \ m/s^2$ ทิศชี้ลง

นายแดงแทนค่า ดังนี้ $3m = (0)t + \frac{1}{2}(7.8m/s^2)t^2$

จะได้ $t = 0.88$ วินาที

ตัวอย่างที่ 10.1.2 นายแดงมวล 60 กิโลกรัม ยืนบนตาชั่งในลิฟท์ ตาชั่งจะอ่านเท่าใด ถ้าลิฟท์เคลื่อนที่ขึ้นและช้าลงเรื่อยๆด้วยขนาดความเร่ง 2 เมตร/วินาที^{2}

<u>วิธีทำ</u> ให้ N เป็นแรงที่จานตาชั่งทำต่อเท้านายแดง ซึ่งก็คือค่าที่ตาชั่งอ่าน ไม่ว่าลิฟท์จะเคลื่อนที่ขึ้นหรือลงจะเร็วขึ้นหรือช้าลง ทิศของ N จะชี้ขึ้น

ลิฟท์เคลื่อนที่ขึ้นและช้าลงเรื่อยๆ ทิศของความเร่งชี้ลง

<u>วิธีที่ 1</u> <u>จะใช้กรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง</u> โดยใช้ลิฟท์เป็นกรอบอ้างอิง

แรงจริง มีแรงดึงดูดของโลก $60\,g$ นิวตัน ทิศชี้ลง

และแรงที่จานตาชั่งทำต่อเท้านายแดง คือ N ทิศชี้ขึ้น

เนื่องจากลิฟท์มีความเร่ง มี 2 เมตร/วินาที^{2} ทิศชี้ลง จึงมีแรงเทียม $(60kg)(2m/s^2)$ นิวตัน ทิศชี้ขึ้น กระทำต่อนายแดง

นายแดงอยู่นิ่งเทียบกับลิฟท์ จาก $m\,a' =$ แรงจริง+แรงเทียม

ดูในแนวดิ่ง $0 = N - 60g + 60(2)$ (1)

$N =$ 468 นิวตัน

<u>วิธีที่ 2 จะใช้กรอบอ้างอิงเฉื่อย</u>

แรงจริง มีแรงดึงดูดของโลก $60\,g$ นิวตัน ทิศลง

และแรงที่จานตาชั่งทำต่อเท้านายแดง คือ N ทิศชี้ขึ้น

จาก $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

โดยความเร่งอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อยคือ 2 เมตร/วินาที^{2} ทิศชี้ลง

ดูในแนวดิ่ง ให้ทิศลงเป็นบวก

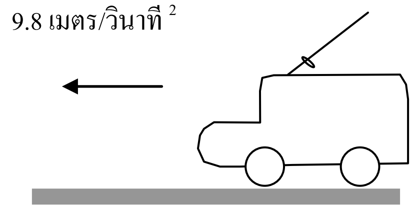
$60g - N =$ $60(2)$ (2)

$N =$ 468 นิวตัน

ถ้าดูสมการ (1) เทียบกับสมการ(2) ในเชิงคณิตศาสตร์แล้วเหมือนการย้ายข้างสมการ แต่นักศึกษาพึงระลึกว่าฟิสิกส์ของสองสมการนี้แตกต่างกัน สมการแรกเขียนโดยผู้สังเกตที่มีความเร่ง สมการหลังเขียนโดยผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงเฉื่อย

ตัวอย่างที่ 10.1.3 รถซุปเปอร์คาร์คันหนึ่งมีเสาอากาศวิทยุซึ่งเรียบและลื่นยาว 1 เมตร ซึ่งเอียงทำมุม 37° กับแนวระดับ ลูกปัดมวล 100 กรัม ร้อยอยู่ในเสาอากาศวิทยุนี้ ดังรูป ต.ย.10.1.3ก. เมื่อเริ่มต้นรถเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่โดยลูกปัดอยู่ที่โคนเสาวิทยุ

จากนั้นคนขับเหยียบคันเร่งเพิ่ม ทำให้รถมีความเร่ง 9.8 เมตร/วินาที ^{2} จงหาแรงที่เสาอากาศกระทำต่อลูกปัด และเป็นเวลานานเท่าใดนับจากการเหยียบคันเร่งเพิ่ม ลูกปัดจึงจะเคลื่อนที่ถึงปลายเสา



รูป ต.ย.10.1.3ก.

วิธีทำ วิธีที่ 1 ใช้กรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง คือรถยนต์ สมมตินายแดงอยู่บนรถยนต์

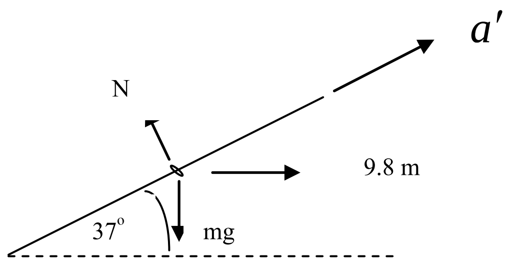
พิจารณาหลังจากเหยียบคันเร่งเพิ่ม นายแดงจะเห็นแรงที่กระทำต่อลูกปัด ดังนี้

แรงจริง ลูกปัดสัมผัสกับเสาอากาศ ดังนั้นเสาอากาศออกแรงต่อลูกปัดได้ เนื่องจากเสาอากาศลื่น แรงจึงตั้งฉากกับเสาอากาศ คือแรง N ในรูป ข.

แรงดึงดูดของโลก mg ทิศชี้ลงในแนวดิ่ง

แรงเทียม เนื่องจากความเร่งของรถ 9.8 เมตร/วินาที ^{2} ทิศไปข้างหน้า แรงเทียมจึงมีขนาด $9.8m$ ทิศชี้ไปข้างหลัง

นายแดงที่ติดไปกับรถจะคิดว่าเขา(และรถ)อยู่นิ่ง และเห็นลูกปัดมีความเร่ง a' ทิศไปตามเสาอากาศ ดังรูป ข.



ข.

นายแดงดูในแนวตั้งฉากกับเสาอากาศเห็นองค์ประกอบของความเร่ง a' ในแนวนี้เป็นศูนย์ ดังนั้นเขาเขียนสมการในแนวนี้ว่า

$$N - mg\cos 37^0 - 9.8m\sin 37^0 = 0$$

จะได้ $N = 1.372$ นิวตัน ตอบ

นายแดงดูในแนวเสาอากาศเห็นความเร่งในแนวนี้คือ a' ให้ทิศขึ้นตามเสาอากาศเป็นบวก ดังนั้นเขาเขียนสมการในแนวนี้ว่า

$$ma' = 9.8m\ \cos 37^0 - m(9.8)\sin 37^0$$

$$a' = 1.96 \quad m/s^2$$

เนื่องจากความเร่งคงที่ ใช้สูตร $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ ได้ โดยนายแดงเห็นความเร็วต้นของลูกปัดเป็นศูนย์

$$1 = (0)t + \frac{1}{2}(1.96)t^2$$

$$t = 1.01 \quad \text{วินาที}$$

คือลูกปัดใช้เวลา 1.01 วินาที ไถลจากโคนเสาถึงปลายเสา ตอบ

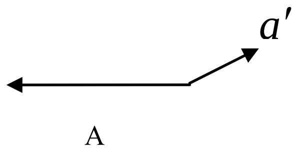
วิธีที่ 2 ใช้กรอบอ้างอิงเฉื่อย

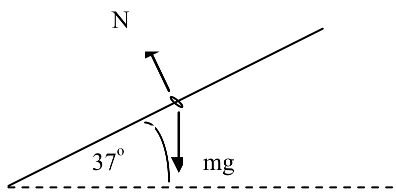
ลูกปัดเคลื่อนที่ไปตามเสาอากาศ โดยเสาอากาศมีความเร่งเท่ากับรถ ดังนั้น

ความเร่งของลูกปัดอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย = ความเร่งของรถ บวก(แบบเวกเตอร์) ความเร่งของลูกปัดอ้างอิงกับรถ

คือ $\bar{a} = \bar{A} + \bar{a}'$

เราไม่จำเป็นต้องบวก $\bar{A} + \bar{a}'$ แต่จะเขียนเป็นแผนผังดังรูป ค.





ค.

แรงจริงที่ทำต่อลูกปัดมีแรงจากเสาอากาศ N และแรงโน้มถ่วง mg ดังรูป ค.

ดูในแนวตั้งฉากกับเสาอากาศ ให้ทิศตามแรง N เป็นบวก องค์ประกอบของความเร่งของลูกปัดในแนวนี้คือ $A\sin 37^0$ ดังนั้น

$$N - mg\cos 37^0 = m(A\sin 37^0) = m(9.8\sin 37^0)$$

จะได้ $N = 1.372$ นิวตัน <u>ตอบ</u> เหมือนกับวิธีที่ 1

ดูในแนวเสาอากาศ ให้ทิศลงตามเสาอากาศเป็นบวก องค์ประกอบของความเร่งของลูกปัดในแนวนี้คือ $A\cos 37^0 - a'$ ดังนั้น

$$mg\sin 37^0 = m(9.8\cos 37^0 - a')$$

จะได้ $a' = 1.96 \quad m/s^2$

เนื่องจาก a' คงที่ เราใช้สูตร $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ ได้ คือ

$$1 = 0 + \frac{1}{2}(1.96)t^2 \rightarrow t = 1.01$$ วินาที <u>ตอบ</u> เหมือนกับวิธีที่ 1

10.2 การดัดแปลงกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเพื่อใช้กับกรอบอ้างอิงบนผิวโลก

ในหัวข้อ 10.1 นักศึกษาได้เห็นแล้วว่า ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ในแนวตรงด้วยความเร่งจะรู้สึกว่ามีแรงเทียมกระทำต่อวัตถุมวล m โดยเขาบอกว่า

มวลคูณความเร่ง เท่ากับ แรงจริง + แรงเทียม

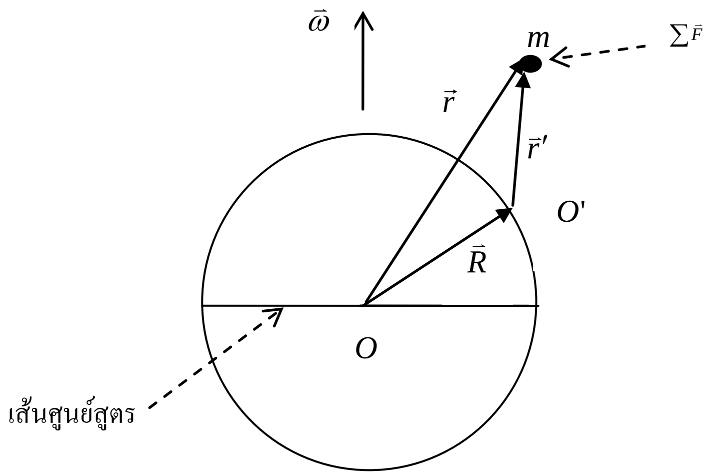
การรู้แรงจริงและแรงเทียมที่กระทำต่อวัตถุทำให้ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงที่มีความเร่งรู้ว่าวัตถุจะเคลื่อนที่อย่างไร ตัวอย่างเช่นในตัวอย่างที่ 10.1.3 นายแดงรู้ว่าลูกปัดเคลื่อนที่ในแนวตรง(ตามแนวเสาอากาศ) เมื่อเวลาผ่านไปนายแดงรู้ว่าลูกปัดอยู่ที่ตำแหน่งใดของเสาอากาศ มีความเร็วเท่าใด จะเคลื่อนที่ถึงปลายเสาเมื่อใด เป็นต้น

ผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิงที่มีความเร่งเพราะโลกหมุน เราจึงคาดว่าน่าจะมีความสัมพันธ์ว่า

มวลคูณความเร่ง เท่ากับ แรงจริง + แรงเทียม (10.2.1)

คือเราคาดว่าน่าจะคล้ายๆกับกรณีกรอบอ้างอิงที่เคลื่อนที่ในแนวตรงด้วยความเร่ง ดังนั้นในหัวข้อ 10.2 นี้ เราจะเริ่มด้วยการหาว่าผู้สังเกตที่อยู่บนผิวโลกจะเห็นมีแรงเทียมอะไรบ้างกระทำต่อวัตถุ จากนั้นค่อยมาดูว่าแรงจริงและแรงเทียมทำให้เรา(ซึ่งอยู่บนผิวโลก)เห็นวัตถุเคลื่อนที่อย่างไร

รูป 10.2.1 แสดงโลกและมวล m สมมติว่ามีผู้สังเกตสองคน คือนางสาวปูและนายแดง นางสาวปูติดตรึงกับจุด O ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางโลกและเป็นจุดกำเนิดของพิกัด xyz นายแดงติดตรึงกับจุด O' บนผิวโลกและเป็นจุดกำเนิดของพิกัด $x'y'z'$ ดังนั้น นางสาวปูเป็นผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง ส่วนนายแดงเป็นผู้สังเกตที่หมุนด้วยความเร็วเชิงมุมเดียวกับความเร็วเชิงมุมในการหมุนของโลก คือ $\bar{\omega}$ ซึ่งมีทิศชี้ขึ้น ดังในรูป 10.2.1



รูป 10.2.1

ให้ มวล m ถูกแรง(จริง)ลัพธ์ $\sum \vec{F}$ กระทำ

$\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวล m อ้างอิงกับ O

$\vec{r}'$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวล m อ้างอิงกับ O'

$\vec{R}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของ O' อ้างอิงกับ O

ถ้านักศึกษาเปรียบเทียบรูป 10.2.1 กับรูป 10.1.1 จะเห็นว่ามันคือรูปเดียวกัน สิ่งที่ต่างกันมีเพียงแค่ O' ในรูป 10.1.1 มีความเร่งเนื่องจากการเคลื่อนที่ในแนวตรง ส่วน O' ในรูป 10.2.1 มีความเร่งเนื่องจากการหมุน

จากรูป 10.2.1 จะเห็นว่า $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$ (10.2.2)

แม้จะเป็นการเยิ่นเย้อ แต่เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจ เราจะทำตามที่เคยทำในหัวข้อ 10.1 คือ

นางสาวปูซึ่งเป็นผู้สังเกตที่อยู่นิ่งจะเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\vec{r}$ เป็น

$$\left(\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d}{dt}(\vec{R}+\vec{r}')\right)_{fixed} = \left(\frac{d\,\vec{R}}{dt}\right)_{fixed} + \left(\frac{d\,\vec{r}'}{dt}\right)_{fixed} \qquad (10.2.3)$$

สมการ(10.2.3) เป็นสมการเดียวกันกับสมการ (10.1.2)

นักศึกษาดูสมการ(10.2.3) จะเห็นว่าพจน์ $\left(\dfrac{d\,\vec{R}}{dt}\right)_{fixed}$ นั้นไม่ยาก เพราะเราเขียนได้ว่า

$\vec{R} = R_x\,\hat{i} + R_y\,\hat{j} + R_z\hat{k}$ ดังนั้นการหา $\left(\dfrac{d\,\vec{R}}{dt}\right)_{fixed}$ หาได้ไม่ยากเพราะผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเห็นเวกเตอร์ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ไม่ขึ้นกับเวลา หรือจะทิ้งไว้ไม่หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งก็ไม่เป็นเป็นไร เพราะเรารู้ว่าเมื่อหาอนุพันธ์อีกครั้ง $\left(\dfrac{d^2\,\vec{R}}{dt^2}\right)_{fixed}$ เป็นความเร่งของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่

พจน์ที่เป็นปัญหาคือ $\left(\dfrac{d\,\vec{r}\,'}{dt}\right)_{fixed}$ เพราะ $\vec{r}\,' = x'\,\hat{i}\,' + y'\,\hat{j}\,' + z'\,\hat{k}\,'$ แต่ผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเห็น $\hat{i}\,', \hat{j}\,', \hat{k}\,'$ มีทิศเปลี่ยนแปลงกับเวลา เราจึงต้องใช้ความสัมพันธ์ในภาคผนวก ดังนั้นในเมื่อต้องใช้ความสัมพันธ์ในภาคผนวก เราจะทำตามขั้นตอนที่นักศึกษามักจะพบในหนังสือต่างๆ คือ

จากสมการ(15) ในภาคผนวก จะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\vec{r}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งและผู้สังเกตที่หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ สัมพันธ์กันดังนี้

$$\left(\frac{d\,\vec{r}}{d\,t}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\,\vec{r}}{d\,t}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (10.2.4)$$

พิจารณาพจน์ $\left(\dfrac{d\,\vec{r}}{dt}\right)_{rot}$ เนื่องจาก $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left(\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right)_{rot} = \left(\frac{d\,\vec{R}}{dt}\right)_{rot} + \left(\frac{d\,\vec{r}\,'}{dt}\right)_{rot}$$

เนื่องจาก $\vec{R}$ หมุนไปพร้อมกับโลก นายแดงซึ่งเป็นผู้สังเกตที่หมุนจะเห็นทั้งขนาดและทิศของ $\vec{R}$ ไม่เปลี่ยน ถ้าจะพูดให้ชัดๆคือนายแดงจะเห็นขนาดของ $\vec{R}$ เท่ากับรัศมีโลก และจะเห็นทิศของ $\vec{R}$ ชี้ขึ้นบนฟ้าตลอดเวลา ดังนั้น $\left(\dfrac{d\,\vec{R}}{dt}\right)_{rot} = 0$

จะได้
$$\left(\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right)_{rot} = \left(\frac{d\,\vec{r}\,'}{dt}\right)_{rot} = \vec{v}\,' \qquad (10.2.5)$$

สมการ(10.2.4) จะเป็น $\bar{v} = \bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}$ (10.2.6)

เมื่อ $\bar{v}$ คือความเร็วของมวล m อ้างอิงกับ O

$\bar{v}'$ คือความเร็วของมวล m อ้างอิงกับ O'

หาอัตราการเปลี่ยนแปลงของสมการ(10.2.6) สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง โดยใช้สมการสมการ(15) ในภาคผนวกอีกครั้ง จะได้

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d}{dt}\{\bar{v}' + \bar{\omega}\times\bar{r}\}\right)_{rot} + \bar{\omega}\times\left(\bar{v}' + \bar{\omega}\times\bar{r}\right)$$

$$\bar{a} = \left(\frac{d\bar{v}'}{dt}\right)_{rot} + \left(\frac{d}{dt}\{\bar{\omega}\times\bar{r}\}\right)_{rot} + (\bar{\omega}\times\bar{v}') + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$$

$$\bar{a} = \bar{a}' + \left[\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_{rot}\times\bar{r}\right] + \bar{\omega}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_{rot} + (\bar{\omega}\times\bar{v}') + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) \qquad (10.2.7)$$

จากสมการ (10.2.5) $\left(\frac{d\,\bar{r}}{dt}\right)_{rot} = \bar{v}'$ ดังนั้นสมการ(10.2.7) จะเป็น

$$\bar{a} = \bar{a}' + \left[\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_{rot}\times\bar{r}\right] + 2(\bar{\omega}\times\bar{v}') + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) \qquad (10.2.8)$$

เมื่อ $\bar{a}$ คือความเร่งของมวล m อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย

$\bar{a}'$ คือความเร่งของมวล m อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงที่หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\bar{\omega}$

เราสนใจการหมุนของโลก โลกหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ คือ $\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_{rot} = 0$

ดังนั้น สมการ(10.2.8) จะเป็น

$$\bar{a} = \bar{a}' + 2(\bar{\omega}\times\bar{v}') + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$$

หรือ $\bar{a}' = \bar{a} - 2(\bar{\omega}\times\bar{v}') - \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$ (10.2.9)

คูณสมการ (10.2.9) ด้วยมวล m

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}') - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \qquad (10.2.10)$$

แต่ $m\vec{a}$ เท่ากับแรงจริง คือเท่ากับ $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = \sum\vec{F}$ เพราะ $\vec{a}$ อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย ดังนั้น

$$m\vec{a}' = \sum\vec{F} - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}') - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \qquad (10.2.11)^{**}$$

จากสมการ(10.2.11) นายแดงซึ่งเป็นผู้สังเกตที่อยู่บนผิวโลกจะรู้สึกว่ามวล m นอกจากจะมีแรงจริง $\sum\vec{F}$ กระทำแล้ว ยังคล้ายกับว่ามีแรง $-2m(\vec{\omega}\times\vec{v}')$ และ $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ กระทำอีกด้วย แต่เนื่องจากหาตัวผู้ออกแรงไม่เจอ เราจึงเรียกพจน์ $-2m(\vec{\omega}\times\vec{v}')$ และ $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ ว่า “แรงเทียม”

โดย พจน์ $-2m(\vec{\omega}\times\vec{v}')$ เราเรียกว่าแรงโคริโอลิส (Coriolis force)

พจน์ $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ เราเรียกว่าแรงหนีศูนย์กลาง (centrifugal force)

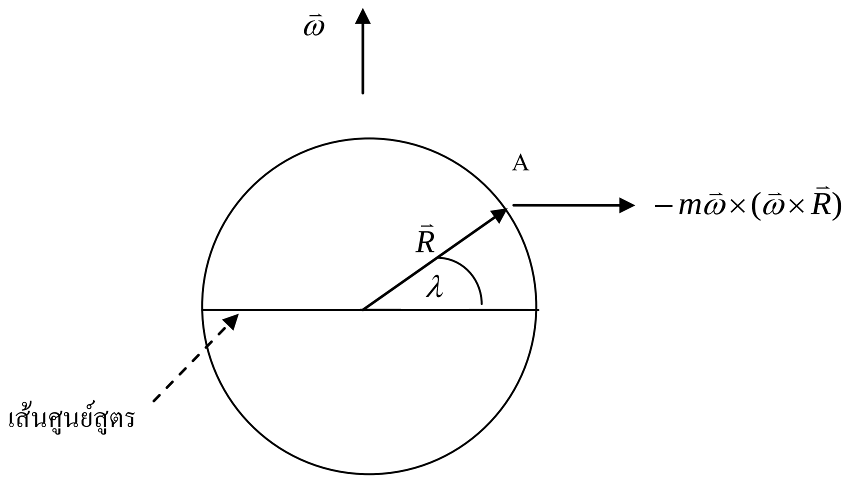
สมการ (10.2.11) คือสมการที่เราดัดแปลงกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเพื่อใช้กับผู้สังเกตบนผิวโลก ผู้สังเกตบนผิวโลกจะบอกว่านอกจากจะมีแรงจริงกระทำต่อวัตถุแล้ว ยังมีแรง(เทียม)โคริโอลิส และแรง(เทียม)หนีศูนย์กลางกระทำต่อวัตถุมวล m อีกด้วย

ทั้งแรงโคริโอลิสและแรงหนีศูนย์กลาง เป็นแรงเทียมเพราะหาตัวผู้ออกแรงไม่ได้ <u>แต่แม้เป็นแรงเทียม มันจะส่งผลต่อการเคลื่อนที่ของมวล m เมื่อการเคลื่อนที่นี้สังเกตโดยคนซึ่งอยู่บนผิวโลก</u>

ตัวอย่างที่ 10.2.1 เราจะดูขนาดและทิศของแรง(เทียม)หนีศูนย์กลางที่ทำต่อวัตถุมวล m ซึ่งอยู่บริเวณใกล้ๆ ผิวโลก ที่ละติจูด λ

ผู้สังเกตบนซึ่งอยู่บนผิวโลกจะบอกว่ามีแรง(เทียม)หนีศูนย์กลาง $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ กระทำต่อวัตถุมวล m โดย $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวล m อ้างอิงกับจุดศูนย์กลางโลก

ปกติแล้วเราสนใจวัตถุที่เคลื่อนที่ใกล้ๆผิวโลก คือ $\vec{r}\approx\vec{R}$ เมื่อ $\vec{R}$ คือเวกเตอร์รัศมีของโลก ดังรูป ต.ย.10.2.1ก. ดังนั้น แรงหนีศูนย์กลางจึงเขียนได้เป็น $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$



รูป ต.ย.10.2.1ก.

ที่ตำแหน่ง A ในรูป ต.ย.10.2.1ก. ดู $\bar{\omega}\times\bar{R}$ ก่อน ขนาดจะเป็น $\omega R\cos\lambda$ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ

$\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{R})$ ที่ตำแหน่ง A จะมีทิศไปทางซ้ายมือของเรา โดยขนาดจะเป็น $\omega^2 R\cos\lambda$ เพราะ $\bar{\omega}$ ตั้งฉากกับ $\bar{\omega}\times\bar{R}$

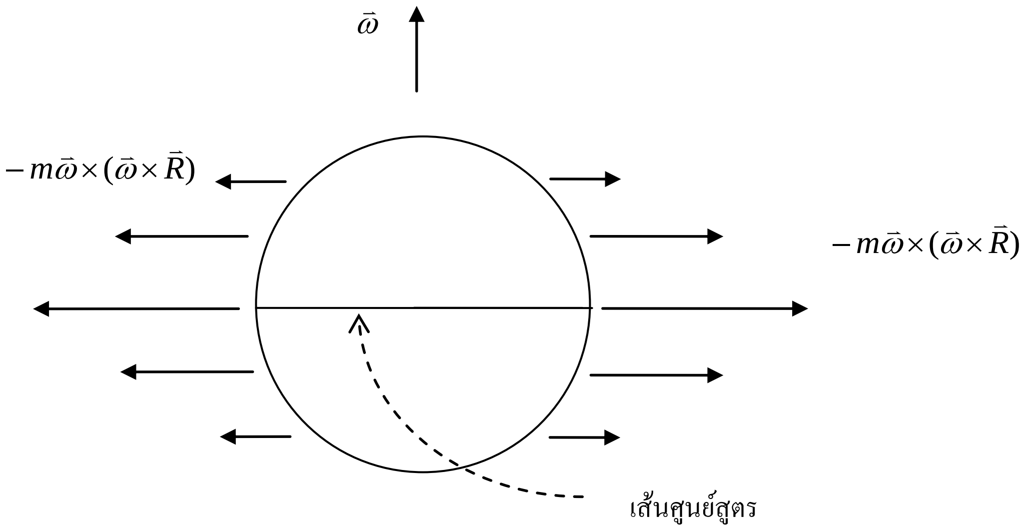
$-\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{R})$ จึงมีทิศไปทางขวามือของเรา

ดังนั้น ที่ตำแหน่ง A ผู้สังเกตบนซึ่งอยู่บนผิวโลกจะบอกว่ามีแรง(เทียม)หนีศูนย์กลางขนาด $m\omega^2 R\cos\lambda$ <u>ทิศพุ่งออกจากแกนโลกและตั้งฉากกับแกนโลก</u> กระทำต่อมวล m

ที่ตำแหน่งอื่นๆบนผิวโลก นักศึกษาพิจารณาดูจะเห็นว่ามีแรง(เทียม)หนีศูนย์กลางขนาด $m\omega^2 R\cos\lambda$ <u>ทิศพุ่งออกจากแกนโลกและตั้งฉากกับแกนโลก</u>เช่นกัน กระทำต่อมวล m

แรงหนีศูนย์กลางมีค่ามากที่สุดที่บริเวณศูนย์สูตร และจะน้อยลงเมื่อขยับเข้าใกล้ขั้วโลก ดังรูป ต.ย. 10.2.1ข. โดยแรงหนีศูนย์กลางที่ละติจูดเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน ไม่ว่าจะเป็นละติจูดเหนือหรือละติจูดใต้

ตัวอย่างเช่นที่ละติจูด 30 องศา เหนือ ขนาดของแรงหนีศูนย์กลางเท่ากับที่ละติจูด 30 องศา ใต้



ข.พึงระลึกว่าในรูปนี้เขียนขนาดของแรงหนีศูนย์กลางมากเกินจริง จึงไม่ได้
เขียนแรงดึงดูดของโลกลงไป

โลกมีรัศมีประมาณ 6 300 กิโลเมตร ที่เส้นศูนย์สูตร รัศมีโลก $\bar{R}$ ตั้งฉากกับ $\bar{\omega}$ ดังนั้น แรงหนีศูนย์กลาง $-m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{R})$ จึงมีทิศชี้ขึ้นไปบนฟ้าสวนกับทิศของแรงดึงดูดของโลกและมีขนาดเป็น $m\omega^2 R$ โดย $m\omega^2 R \approx m\,(7.3\times10^{-5}$ เรเดียน/วินาที$)^2$ $(6300\times10^3$ เมตร$) =$ $m\,3.4\times10^{-2}$ เมตร/วินาที^{2} ซึ่งน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงดึงดูดของโลก $mg = m9.8$ เมตร/วินาที^{2} ก็คือแม้แรงหนีศูนย์กลางมากที่สุด (ที่เส้นศูนย์สูตร) ก็ยังน้อยมากเมื่อเทียบกับ mg นอกจากนี้แรงหนีศูนย์กลางไม่ขึ้นกับความเร็วคล้ายๆกับแรงดึงดูดของโลก <u>จึงเป็นการเหมาะสมที่เราจะเอาความเร่งหนีศูนย์กลางไปเป็นส่วนหนึ่งของความเร่งของการตกอย่างอิสระ g</u>

อย่างไรก็ตามในระดับมัธยมมักจะถือว่าผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย ซึ่งก็คือมักตัดแรงหนีศูนย์กลางทิ้งนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 10.2.2 จงคำนวณความเร่งเนื่องจากการตกอย่างอิสระบริเวณใกล้ผิวโลก ว่าขึ้นกับละติจูดอย่างไร

<u>วิธีทำ</u> ก่อนอื่นนักศึกษาต้องรู้ว่า เราต้องคิดถึงผลของการหมุนของโลก คือต้องมองว่าผิวโลกเป็นกรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง เพราะถ้าไม่คิดผลการหมุนของโลก ความเร่งของการตกอย่างอิสระจะไม่ขึ้นกับละติจูด

นอกจากนี้ก็ต้องรู้ว่าความเร่งของการตกอย่างอิสระหมายถึงความเร่งของวัตถุที่ตกอย่างอิสระ สังเกตโดยผู้สังเกตบนผิวโลก <u>โดยไม่คิดผลของแรงโคริโอลิสและแรงต้านอากาศ</u>

หรือจะกล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ <u>ความเร่งของการตกอย่างอิสระหมายถึงความเร่งของวัตถุที่ตกอย่างอิสระ สังเกตโดยผู้สังเกตบนผิวโลก โดยความเร่งนี้เป็นผลจากแรงดึงดูดของโลกและแรง(เทียม)หนีศูนย์กลาง แต่ไม่คิดผลของแรงโคริโอลิสและแรงต้านอากาศ</u>

หลังจากที่รู้ความหมายของความเร่งของการตกอย่างอิสระแล้ว เราจะคำนวณโดยใช้กรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง(คือผิวโลก) แต่เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจ แม้ว่ามันจะเยิ่นเย้อไปหน่อย เราจะดูดังต่อไปนี้

สมมตินายแดงยืนอยู่บนพื้นผิวโลกที่ละติจูด λ มือจับก้อนหินมวล m ไว้นิ่ง

<u>ขณะที่มือจับก้อนหินอยู่นี้</u> นายแดงเห็นความเร่งของก้อนหินเป็นศูนย์ และบอกว่าแรงที่กระทำต่อก้อนหินมี

1)แรงดึงดูดของโลก $m\vec{g}_{att}$ ทิศพุ่งเข้าไปจุดศูนย์กลางของโลก ระลึกว่า $\vec{g}_{att} = \dfrac{GM}{R^2}$ ทิศพุ่งเข้าไปจุดศูนย์กลางของโลกโดย M และ R คือมวลและรัศมีของโลก G คือค่านิจโน้มถ่วงสากล

2)แรงจากมือ

3)แรงหนีศูนย์กลาง $m\omega^2 R\cos\lambda\ (\hat{i})$ ดังในรูป ต.ย.10.2.2ก.

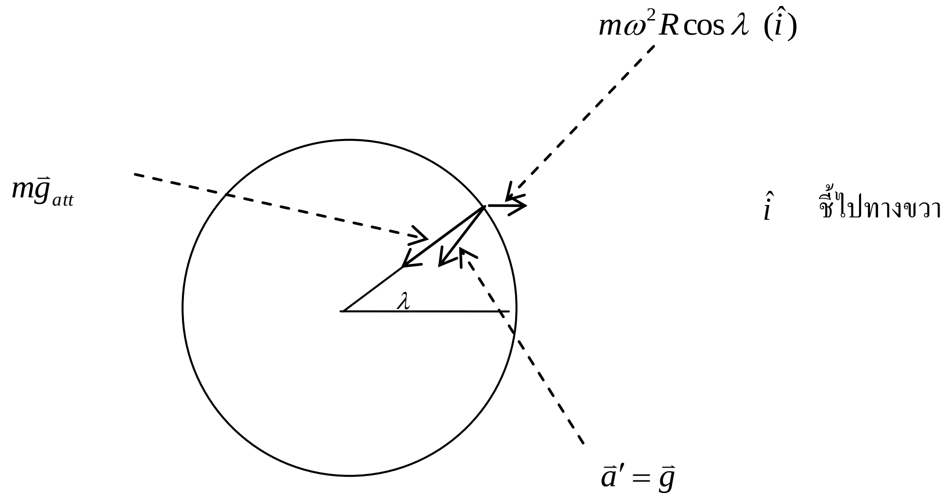
จากนั้น นายแดงปล่อยมือจากก้อนหิน <u>ทันทีที่ปล่อยมือ</u>

นายแดงบอกว่าแรงที่กระทำต่อก้อนหินมี

1)แรงดึงดูดของโลก $m\vec{g}_{att}$ ทิศพุ่งเข้าไปจุดศูนย์กลางของโลก

2)แรงหนีศูนย์กลาง $m\omega^2 R\cos\lambda\ (\hat{i})$

ทันทีที่ปล่อยมือ นายแดงเห็นความเร็วของก้อนหินเป็นศูนย์แต่ความเร่งไม่เป็นศูนย์ เนื่องจากความเร็วเป็นศูนย์จึงไม่มีแรงโคริโอลิสและแรงต้านอากาศ ความเร่ง $\vec{a}'$ ที่นายแดงเห็นขณะนี้คือความเร่งของการตกอย่างอิสระ $\vec{g}$ นั่นเอง



รูป ต.ย.10.2.2ก.

นายแดงเขียนสมการว่า $m\,\vec{a}' = m\,\vec{g}_{att} + m\,\omega^2 R\cos\lambda\ (\hat{i})$

แต่ได้กล่าวมาแล้วว่า $\vec{a}'$ คือ $\vec{g}$ ดังนั้น

$$m\,\vec{g} = m\,\vec{g}_{att} + m\,\omega^2 R\cos\lambda\ (\hat{i}) \qquad (1)$$

$$\vec{g} = \vec{g}_{att} + \omega^2 R\cos\lambda\ (\hat{i}) \qquad (2)$$

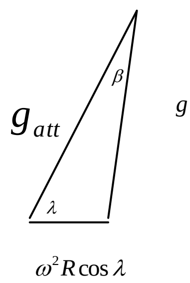
หาขนาดของ $\vec{g}$ จาก $(g\,)^2 = (g_{att})^2 + (\omega^2 R\cos\lambda\,)^2 + 2g_{att}\omega^2 R\cos\lambda\cos(180^0 - \lambda)$

$$g = \{(g_{att})^2 + (\omega^2 R\cos\lambda)^2 - 2g_{att}\omega^2 R\cos^2\lambda\}^{1/2} \qquad (3)*$$

เพื่อเป็นการเปรียบเทียบกับ g ในตัวอย่างที่ 9.3.3.1 สมการ(3)เขียนอีกอย่างหนึ่งได้เป็น

$$g = \{(\omega^2 R\cos\ \lambda\sin\lambda)^2 + (g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)^2\}^{1/2}$$

มุมที่ $\vec{g}$ เบนไปจาก $\vec{g}_{att}$ สมมติเป็นมุม β หาได้จากรูป ต.ย. 10.2.2 ข.



ข.

จากรูป ข. $\dfrac{\omega^2 R\cos\lambda}{\sin\beta} = \dfrac{g_{att}}{\sin(180^0-\lambda-\beta)}$

$$\frac{\omega^2 R\cos\lambda}{\sin\beta} = \frac{g_{att}}{\sin\lambda\cos\beta+\cos\lambda\sin\beta}$$

คูณด้วย $\sin\beta$ แล้วจัดพจน์ จะได้ $\cot\beta = \dfrac{1}{\sin\lambda}\left(\dfrac{g_{att}}{\omega^2 R\cos\lambda}-\cos\lambda\right)$

ก็คือ $$\tan\beta = \frac{\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda}{g_{att}-\omega^2 R\cos^2\lambda} \qquad (4)*$$

พิจารณาสมการ(3) คือ

$$g = \{(g_{att})^2 + (\omega^2 R\cos\lambda)^2 - 2g_{att}\omega^2 R\cos^2\lambda\}^{1/2}$$

จากตัวอย่างที่ 10.2.1 เรารู้ว่า $\omega^2 R = 3.4\times 10^{-2}$ เมตร/วินาที^{2} เมื่อยกกำลังสองก็จะประมาณ 10^{-3} ซึ่งน้อยมากเมื่อเทียบกับ $(g_{att})^2$ และ $2g_{att}\omega^2 R\cos^2\lambda$ เราจึงตัด $(\omega^2 R\cos\lambda)^2$ ทิ้ง จะได้

$$g \approx \{(g_{att})^2 - 2g_{att}\omega^2 R\cos^2\lambda\}^{1/2}$$

$$g \approx g_{att}\{1-\frac{2\omega^2 R\cos^2\lambda}{g_{att}}\}^{1/2} \qquad (5)$$

จากการประมาณแบบ binomial คือ $(1\pm x)^n \approx 1+nx \qquad ; x<<1$

จะได้ $$g \approx g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda \qquad (6)*$$

สมการ(6) เป็น <u>g ที่ละติจูดต่างๆที่นักศึกษามักจะพบในหนังสือทั่วไป</u>

ที่เส้นศูนย์สูตร $\lambda = 0 \rightarrow g = g_{att} - \omega^2 R$

ที่ขั้วโลก $\lambda = 90^0 \rightarrow g = g_{att}$

ตัวอย่างที่ 10.2.3 การคำนวณน้ำหนักโดยใช้กรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง

จงคำนวณน้ำหนัก $\bar{W}$ ของวัตถุมวล m ว่าขึ้นกับละติจูด λ อย่างไร และจงหามุม β ซึ่งเป็นมุมที่ $\bar{W}$ ทำกับแนวดิ่ง (แนวรัศมีของโลก หรือแนวของ $\bar{g}_{att}$)

<u>วิธีทำ</u> เราเคยคำนวณน้ำหนักโดยใช้กรอบอ้างอิงเฉื่อยมาแล้วในตัวอย่างที่ 9.3.3.1 ในตัวอย่างที่ 10.2.3 นี้เราจะใช้กรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง(ผิวโลก)

ในตัวอย่างที่ 9.3.3.1 นักศึกษารู้แล้วว่า ถ้ารู้ขนาดและทิศของแรง $\bar{N}$ ที่จานตาชั่งทำต่อมวล m ก็เท่ากับรู้ขนาดและทิศของน้ำหนัก $\bar{W}$ เราจึงจะหาขนาดและทิศของแรง $\bar{N}$ แทน

สมมติมีก้อนหินมวล m <u>วางนิ่ง</u>บนจานตาชั่งบนผิวโลกที่ละติจูด λ นายแดงยืนอยู่บนพื้นโลกใกล้ๆกับตาชั่ง

นายแดงบอกว่าแรงที่กระทำต่อก้อนหินมี

1)แรงดึงดูดของโลก $m\bar{g}_{att}$ ทิศพุ่งเข้าไปจุดศูนย์กลางของโลก

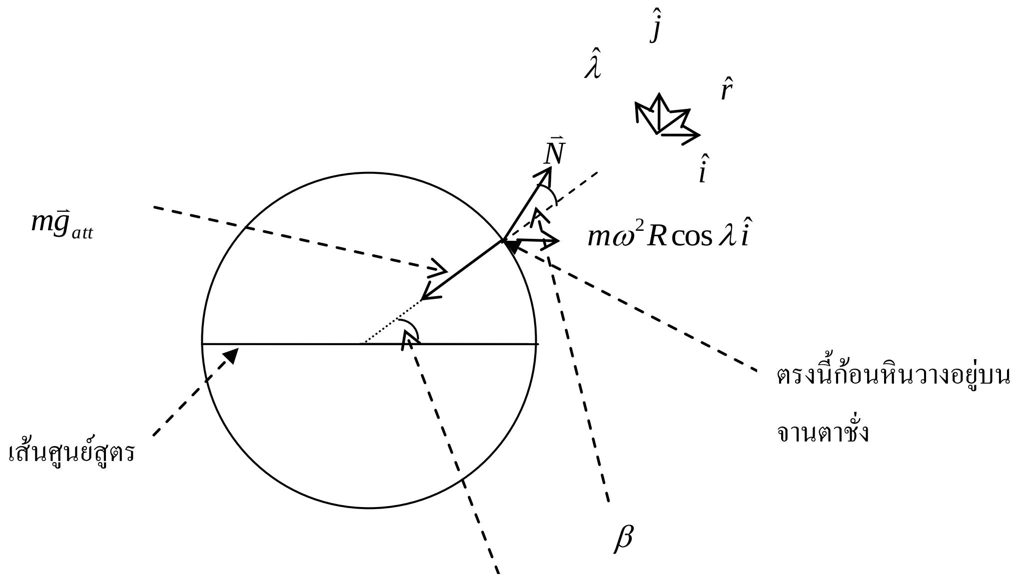
2)แรง $\bar{N}$ ที่จานตาชั่งทำต่อก้อนหิน โดยเบนไปจาก $\bar{g}_{att}$ เป็นมุม β (นักศึกษาที่ไม่เข้าใจควรย้อนไปดูตัวอย่างที่ 9.3.3.1)

3)แรงหนีศูนย์กลาง $m\omega^2 R\cos\lambda(\hat{i})$ ดังในรูป ต.ย.10.2.3

นายแดงเห็นความเร่งของก้อนหินเป็นศูนย์

ให้ $\hat{r}$ และ $\hat{\lambda}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในแนวรัศมีโลก R และแนวตั้งฉากกับรัศมี R

$\hat{j}$ และ $\hat{i}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในแนวแกนหมุนและตั้งฉากกับแกนหมุนของโลก ดังในรูป ต.ย. 10.2.3



รูป ต.ย.10.2.3

นายแดงเขียนสมการในแนวต่างๆเป็นดังนี้

ดูในแนว $\hat{r}$; $\quad m\,g_{att} - N\cos\beta - m\omega^2 R\cos^2\lambda = 0$ (1)

ดูในแนว $\hat{\lambda}$; $\quad N\sin\beta - m\omega^2 R\cos\ \lambda\sin\lambda \ = 0$ (2)

ดูในแนว $\hat{i}$; $\quad m\,g_{att}\cos\lambda - N\cos(\beta+\lambda) - m\omega^2 R\cos\lambda = 0$ (3)

ดูในแนว $\hat{j}$; $\quad m\,g_{att}\sin\lambda - N\sin(\beta+\lambda) = 0$ (4)

ถ้านักศึกษาเทียบกับสมการ(1)ถึง(4) ในตัวอย่างที่ 9.3.3.1 จะเห็นว่ามันเป็นสมการเดียวกัน ดังนั้นถ้าเราเลือกมาสองสมการแล้วแก้สมการ จะได้ว่า

$$N = m\{(\omega^2 R\cos\ \lambda\sin\lambda)^2 + (g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)^2\}^{1/2} \tag{5}$$

$$\tan\beta = \frac{\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda}{g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda} \tag{6}$$

มุมที่ $\vec{N}$ หรือก็คือมุมที่น้ำหนัก $\vec{W}$ เบนไปจากแนวของ $\vec{g}_{att}$ ในสมการ (6) เป็นมุมเดียวกับที่ $\vec{g}$ เบนไปจากแนวของ $\vec{g}_{att}$ ในตัวอย่างที่ 10.2.2 (สมการ 4 ตัวอย่างที่ 10.2.2)

และในตัวอย่างที่ 10.2.2 เราได้ว่า $g = \{(\omega^2 R\cos\ \lambda \sin\lambda)^2 + (g_{att} - \omega^2 R\cos^2\lambda)^2\}^{1/2}$

ดังนั้น แม้จะคิดผลของแรงหนีศูนย์กลาง เราก็ยังคงได้ความสัมพันธ์ที่เรารู้จักกันดี คือ

น้ำหนัก $\bar{W} = \quad m\bar{g}$

ตัวอย่างที่ 10.2.4 ลูกตุ้มฟูโกล์ (Foucault pendulum)

ในเดือนกุมภาพันธ์ ค.ศ.1851 ฟูโกล์ชาวฝรั่งเศสได้ใช้ลูกตุ้มฟูโกล์แสดงให้สาธารณชนเห็นว่าโลกหมุนรอบตัวเอง ไม่กี่สัปดาห์ต่อมาเขาสร้างลูกตุ้มฟูโกล์อีกลูกที่โด่งดังมาก โดยใช้ลวดยาว 67 เมตร ผูกลูกบอลเหล็กหนัก 28 กิโลกรัม แขวนจากโดมของอาคาร Pantheon กรุงปารีส เพื่อให้เห็นว่าระนาบของการแกว่งของลูกตุ้มเปลี่ยนไปอย่างไร เขาลาดพื้นใต้ลูกตุ้มด้วยทรายและติดแท่งเหล็กแหลมใต้ลูกเหล็ก เหล็กแหลมนี้จิ้มลงในทราย เมื่อลูกตุ้มแกว่งไปมา เหล็กแหลมก็จะกรีดทรายทำให้เรานึกเห็นระนาบของการแกว่งของลูกตุ้ม โดยระนาบของการแกว่งจะเบนไปเรื่อยจนครบรอบในเวลาประมาณ 32 ชั่วโมงที่ปารีส คาบของการเบนของระนาบจะสั้นที่สุดที่ขั้วโลกเหนือและใต้ โดยมีคาบประมาณ 24 ชั่วโมง

ที่บริเวณซีกโลกเหนือคนจะเห็นระนาบการแกว่งของลูกตุ้มฟูโกล์เบนไปในลักษณะตามเข็มนาฬิกาและจะเห็นเบนทวนเข็มนาฬิกาที่ซีกโลกใต้

เราจะอธิบายการเบนของระนาบของการแกว่งโดยมองจากกรอบอ้างอิงที่มีความเร่ง

เราซึ่งอยู่บนพื้นดินจะเห็นแรงที่กระทำต่อลูกตุ้มฟูโกล์ ดังนี้

แรงที่ลวดดึงลูกเหล็ก

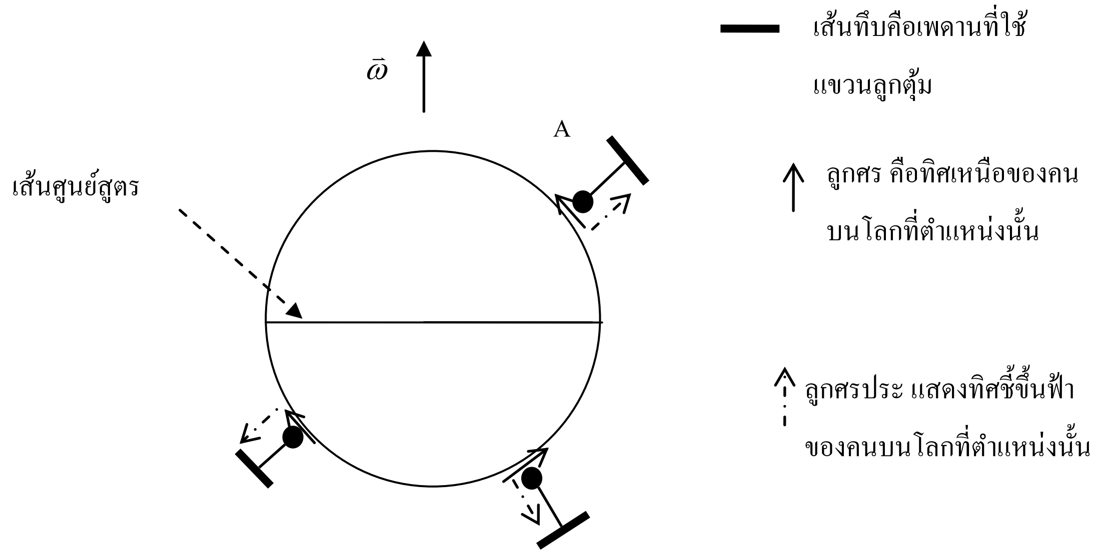
แรงดึงดูดของโลกและแรงหนีศูนย์กลาง

แรงโคริโอลิส

เมื่อลูกตุ้มยังอยู่นิ่ง คือเมื่อยังไม่แกว่งลูกตุ้ม ลวดจะอยู่ในแนวของแรงลัพธ์ของแรงดึงดูดของโลกและแรงหนีศูนย์กลาง (แนวของ $\bar{g}$ ใน ตัวอย่างที่ 10.2.2) ดังนั้นแรงที่ลวดดึงลูกเหล็ก หักล้างกับแรงดึงดูดของโลกและแรงหนีศูนย์กลาง

เมื่อลูกตุ้มแกว่ง เนื่องจากลวดยาวมาก ลูกตุ้มเคลื่อนที่เกือบขนานกับพื้นราบ เราจึงยังคงถือได้ว่าแรงที่ลวดดึงลูกเหล็ก หักล้างกับแรงดึงดูดของโลกและแรงหนีศูนย์กลาง

<u>ดังนั้นเหลือแต่ผลของแรงโคริโอลิส</u> แต่เพื่อความเข้าใจจะวาดรูป ต.ย.10.2.4ก. เพื่อแสดงลูกตุ้มทิศเหนือ ทิศชี้ขึ้นบนฟ้า ที่ตำแหน่งต่างๆบนโลก ให้นักศึกษาดู

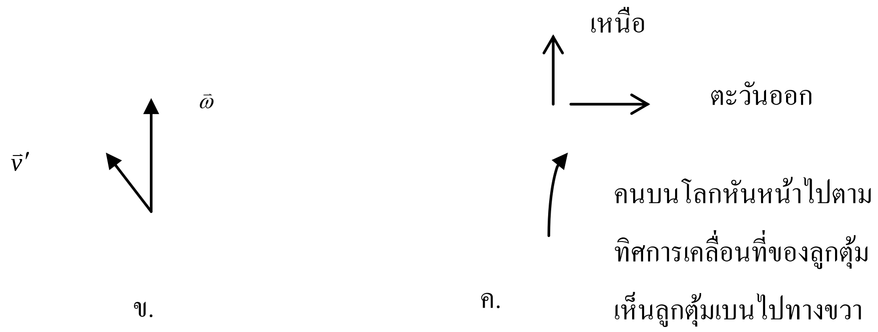


รูป ต.ย.10.2.4 ก. มองจากที่ไกลๆนอกโลก

ในที่นี้ต้องการให้นักศึกษาครูได้เข้าใจเพียงหลักการ ไม่ต้องคำนวณโดยละเอียด คือต้องการเพียงให้นักศึกษาครูได้ดูทิศของแรงโคริโอลิสเท่านั้น เนื่องจากแรงโคริโอลิส คือ $-2m(\bar{\omega}\times\bar{v}')$ เมื่อ $\bar{v}'$ คือความเร็วของมวล m อ้างอิงกับผิวโลก ดังนั้นการดูทิศของแรงโคริโอลิสเราจะดูทิศของ $-(\bar{\omega}\times\bar{v}')$ ก็พอ

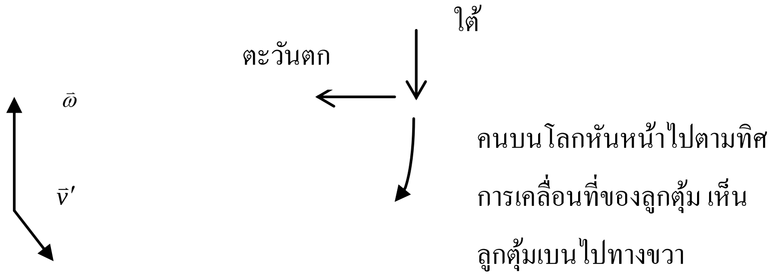
เราจะดูจากไกลๆนอกโลกก่อน ในรูป ต.ย.10.2.4ก. นั้น มี 2 ตำแหน่งอยู่ที่ซีกโลกใต้ อีกตำแหน่งอยู่ที่ซีกโลกเหนือ เราจะเลือกตำแหน่งที่อยู่ที่ซีกโลกเหนือมาเป็นตัวอย่าง จะเรียกว่าตำแหน่ง A

สมมติคนบนโลกดูลูกตุ้มที่เคลื่อนที่จาก<u>ใต้ไปเหนือ</u> ทิศของ $\bar{\omega}$ และ $\bar{v}'$ ที่ตำแหน่ง A เมื่อมองจากไกลๆนอกโลกจะเป็นดังรูป ต.ย.10.2.4ข.



จากรูป ข. $\bar{\omega}\times\bar{v}'$ มีทิศพุ่งออกจากกระดาษ ดังนั้น $-\bar{\omega}\times\bar{v}'$ มีทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ เมื่อดูที่ตำแหน่ง A ในรูป ต.ย.10.2.4ก. ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษคือทิศตะวันออก คือคนบนโลกจะเห็นลูกตุ้มเบนไปทางทิศตะวันออก หรือก็คือเมื่อคนบนโลกหันหน้าไปตามทิศการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มจะเห็นลูกตุ้มเบนไปทางขวาดังรูป ค.

คราวนี้มาดูลูกตุ้มเคลื่อนที่จากเหนือไปใต้บ้าง ทิศของ $\bar{\omega}$ และ $\bar{v}'$ ที่ตำแหน่ง A จะเป็นดังรูป ต.ย.10.2.4ง.



ง. จ.

จากรูป ง. $\bar{\omega}\times\bar{v}'$ มีทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ ดังนั้น $-\bar{\omega}\times\bar{v}'$ มีทิศพุ่งออกจากในกระดาษ เมื่อดูที่ตำแหน่ง A ในรูป ต.ย.10.2.4ก. ทิศพุ่งออกจากกระดาษคือทิศตะวันตก คือคนบนโลกจะเห็นลูกตุ้มเบนไปทางทิศตะวันตก หรือก็คือเมื่อคนบนโลกหันหน้าไปตามทิศการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มจะเห็นลูกตุ้มเบนไปทางขวาดังรูป จ.

จะเห็นว่าจากใต้ไปเหนือหรือเหนือไปใต้ ลูกตุ้มเบนไปทางขวา นักศึกษาลองพิจารณาดูจะเห็นว่าตะวันตกไปตะวันออก หรือตะวันออกไปตะวันตก ก็เบนไปทางขวาเหมือนเดิม เช่นกัน หรือดูในแนวอื่นๆ ก็จะเบนทางขวาเหมือนกัน การเบนขวาตลอดก็คือระนาบของการแกว่งของลูกตุ้มหมุนตามเข็มนาฬิกา

ดังนั้น ระนาบของการแกว่งของลูกตุ้มฟูโกล์ที่ซีกโลกเหนือจะหมุนตามเข็มนาฬิกา

พิจารณาทำนองเดียวกันนักศึกษาจะเห็นว่า ระนาบของการแกว่งของลูกตุ้มฟูโกล์ที่ซีกโลกใต้ จะหมุนทวนเข็มนาฬิกา

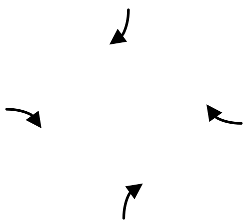
ที่บริเวณเส้นศูนย์สูตร นักศึกษาลองดูทิศของ $-\bar{\omega}\times\bar{v}'$ จะเห็นว่าแรงโคริโอลิสไม่มีผลต่อระนาบของการแกว่ง

ตัวอย่างที่ 10.2.5 พายุไซโคลน

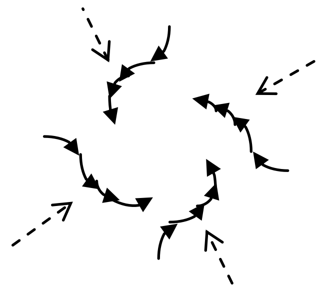
เราจะยกตัวอย่างพายุไซโคลนที่เกิดบริเวณซีกโลกเหนือ

บริเวณความกดอากาศต่ำคือพื้นที่ที่มวลของอากาศได้รับความร้อนสูงจากดวงอาทิตย์ ขณะที่บริเวณความกดอากาศสูงคือพื้นที่ที่มีมวลอากาศเย็น

เมื่อบริเวณความกดอากาศต่ำได้รับความร้อน ความหนาแน่นของอากาศจะน้อยลงทำให้เกิดการยกตัวสูงขึ้น อากาศใกล้ๆก็จะไหลไปแทนที่ ผลของแรงโคริโอลิสทำให้กระแสอากาศที่ไหลไปแทนที่นี้เบนไปทางขวา คล้ายๆกับกรณีของลูกตุ้มฟูโกล์ ดังรูป ต.ย.10.2.5ก.



รูป ต.ย.10.2.5ก.

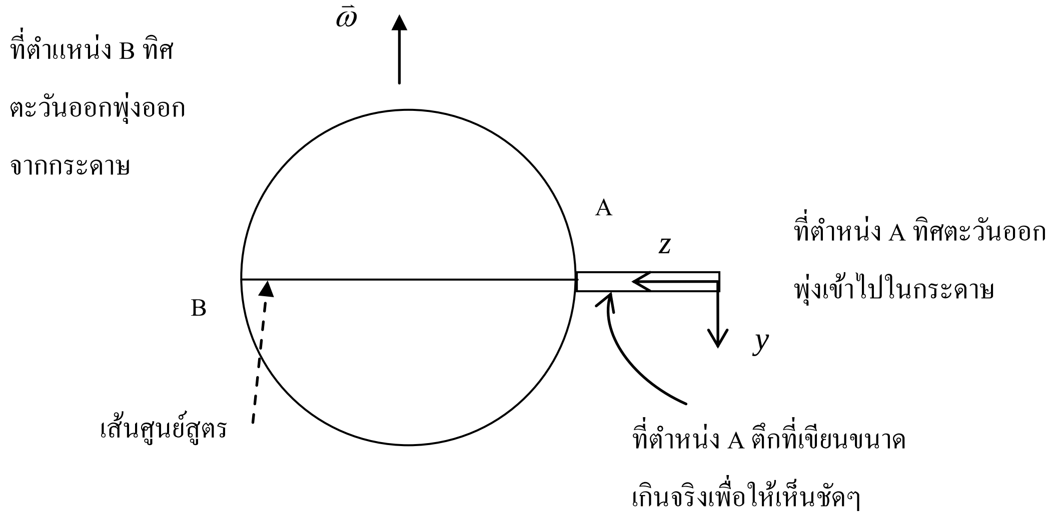


ข.

แต่ที่ต่างกับลูกตุ้มฟูโกล์คือ มีอากาศจากบริเวณความกดอากาศสูงดันเข้ามาทำให้กระแสอากาศเบนไปทางซ้ายดังรูป ข. ซึ่งจะเห็นว่ากระแสอากาศหมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้น<u>แรงโคริโอลิสทำให้พายุไซโคลนที่ซีกโลกเหนือหมุนทวนเข็มนาฬิกา</u>

นักศึกษาพิจารณาทำนองเดียวกันจะเห็นว่า<u>แรงโคริโอลิสทำให้พายุไซโคลนที่ซีกโลกใต้หมุนตามเข็มนาฬิกา</u>

ตัวอย่างที่ 10.2.6 ปล่อยก้อนหินจากยอดตึกสูง 100 เมตร ที่บริเวณเส้นศูนย์สูตร เมื่อก้อนหินตกถึงพื้นจะเยื้องไปทิศใด? และเยื้องไปเท่าใด ?



รูป ต.ย.10.2.6

<u>วิธีทำ</u> โลกมีรัศมีประมาณ 6 300 กิโลเมตร

ที่เส้นศูนย์สูตร รัศมีโลก $\bar{R}$ ตั้งฉากกับ $\bar{\omega}$ ดังนั้น $-\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{R})$ ทิศชี้ขึ้นไปบนฟ้าสวนกับทิศของแรงดึงดูดของโลก โดยมีขนาด $\omega^2 R = (7.3\times10^{-5}$ เรเดียน/วินาที$)^2$ $(6300\times10^3$ เมตร$) = 3.4\times10^{-2}$ เมตร/วินาที^{2}

เราจึงยังคงใช้ตัวเลขที่เราใช้ๆกัน คือ $g = 9.8$เมตร/วินาที^{2} ได้

เรา<u>จะดูที่ตำแหน่ง A เป็นตัวอย่าง</u>

เพื่อความสะดวกเราให้จุดกำเนิดของพิกัดฉากอยู่ที่ยอดตึก แกน z ชี้ลงมาตั้งฉากกับผิวโลก แกน y ชี้ไปทางทิศใต้ แกน x พุ่งเข้าไปในกระดาษ ซึ่งเป็นทิศตะวันออก ดังรูป ต.ย 10.2.6

นักศึกษาควรรู้ว่าการ<u>ปล่อยก้อนหิน</u>ลงมาจากจุดกำเนิด คือเมื่อเริ่มต้น
$t=0, z=0, \dot{z}=0, x=0, \dot{x}=0, y=0, \dot{y}=0$ โดยเราจะเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นเหล่านี้ไปใช้ให้เหมาะสม

ก้อนหินตกไปยังพื้นดินด้วยอัตราเร่ง g ดังนั้น

$$\ddot{z} = g \qquad (1)$$

อินทิเกรตสมการ(1) เทียบกับเวลาได้

$$\dot{z} = g\,t + C_1 \qquad (2)$$

เมื่อเริ่มต้น(คือ $t = 0$) อัตราเร็วของก้อนหินเป็นศูนย์ เพราะเราปล่อยก้อนหินลงมา ไม่ใช่ขว้างก้อนหินลงมา ดังนั้น

$$0 = g\,(0) + C_1 \quad \text{จะได้ } C_1 = 0$$

สมการ(2) จะกลายเป็น

$$\dot{z} = g\,t \qquad (3)$$

อินทิเกรตสมการ(3) เทียบกับเวลาได้

$$z = \frac{1}{2} g\,t^2 + C_2 \qquad (4)$$

เมื่อเริ่มต้น ก้อนหินอยู่ที่จุดกำเนิด คือ $z = 0$ ดังนั้น $C_2 = 0$

สมการ(4) จะกลายเป็น

$$z = \frac{1}{2} g\,t^2 \qquad (5)$$

แรงโคริโอลิส คือ $-2m\bar{\omega}\times\bar{v}'$ โดย $\bar{v}'$ คือ $\dot{z}$ มีทิศตามแนว $+z$ ดังนั้น $-\bar{\omega}\times\bar{v}'$ จึงมีทิศไปตามแกน $+x$ คือทิศตะวันออก

ถ้าดูในแนวแกน x แรงในแนวนี้ เท่ากับ มวลคูณองค์ประกอบของความเร่งในแนวนี้ คือ

$$m\ddot{x} = 2m\omega\dot{z}$$

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{z} \qquad (6)$$

แทนสมการ(3) ลงในสมการ (6) จะได้

$$\ddot{x} = 2\omega g\,t \qquad (7)$$

อินทิเกรตสมการ(7) เทียบกับเวลา ได้

$$\dot{x} = \omega g\, t^2 + C_3 \tag{8}$$

เมื่อเริ่มต้น $\dot{x} = 0$ ดังนั้น $C_3 = 0$ สมการ(8) จะกลายเป็น

$$\dot{x} = \omega g\, t^2 \tag{9}$$

อินทิเกรตสมการ(9) เทียบกับเวลา ได้

$$x = \frac{1}{3}\omega g\, t^3 + C_4 \tag{10}$$

เมื่อเริ่มต้น $x = 0$ ดังนั้น $C_4 = 0$ สมการ(10) จะกลายเป็น

$$x = \frac{1}{3}\omega g\, t^3 \tag{11}$$

สมการ(11)แสดงการเยื้องในพจน์ของเวลา แต่เราต้องการดูการเยื้องในพจน์ของความสูง โดยอาศัยสมการ (5) จะได้ว่า

$$x^2 = \frac{8}{9}\frac{\omega^2}{g} z^3 \tag{12}$$

แทนค่า $\omega = 7.3\times10^{-5}$ เรเดียนต่อวินาที , $g = 9.8$ เมตร/วินาที^{2} , $z = 100$ เมตร

จะได้ $x = 2.2\times10^{-2}$ เมตร คือก้อนหินจะตกถึงพื้นโดยเยื้องไปทางทิศตะวันออก 2.2 เซนติเมตร ตอบ

ถ้าดูที่ตำแหน่ง B นักศึกษาจะเห็นว่า $-\vec{\omega}\times\vec{v}'$ จึงมีทิศไปพุ่งออกจากกระดาษ ซึ่งก็คือก้อนหินจะเยื้องไปทางทิศตะวันออกเช่นกัน

และถ้านักศึกษาลองนึกดูจะเห็นว่า ไม่ตรงไหนของเส้นศูนย์สูตร ก้อนหินที่ตกลงมาจะเยื้องไปทางทิศตะวันออกทั้งนั้น

นักศึกษาจะเห็นว่าการเยื้องไม่มากนัก ดังนั้นในโจทย์การเคลื่อนที่ของโปรเจกไทล์ในระดับมัธยมปลาย เช่นการขว้างก้อนหินไปในอากาศ ซึ่งอัตราเร็วของก้อนหินไม่มากนักและลอยอยู่ในอากาศไม่นาน เราจึงไม่คิดการเบน(เยื้อง)เนื่องจากแรงโคริโอลิส แต่ในการยิงปืนใหญ่ซึ่งกระสุนมีความเร็วสูงและลอยในอากาศนานๆ จำเป็นต้องคิดการเบนเนื่องแรงโคริโอลิส ไม่เช่นนั้นลูกกระสุนปืนใหญ่จะไม่ตกใส่ข้าศึก

ภาคผนวก

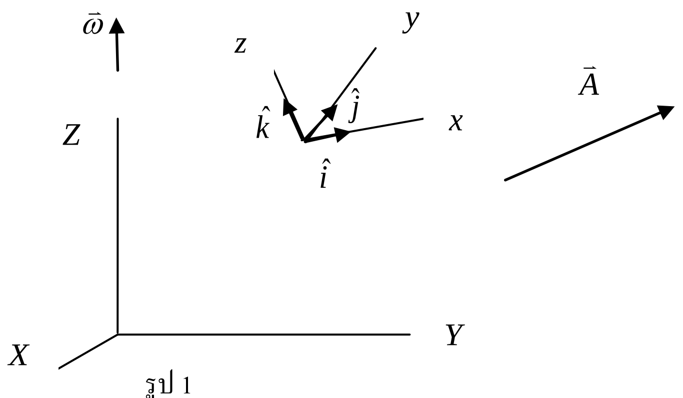
ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง และผู้สังเกตที่อยู่บนผิวโลก

ปกติแล้วในหนังสือต่างๆมักจะหาความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งและผู้สังเกตที่หมุน คือจะไม่ระบุว่ากรอบที่หมุนเป็นกรอบที่ติดอยู่บนผิวโลก แม้ว่ามันจะใช้ได้อย่างครอบคลุมแต่นักศึกษาอาจมีความสงสัยเรื่อง “แกนหมุน” ดังนั้นในภาคผนวกนี้เราจึงจะระบุไปเลยว่า กรอบอ้างอิงที่หมุนคือกรอบอ้างอิงที่ติดอยู่บนผิวโลก

เพื่อความสะดวกในการอ่านและการพิมพ์ ใน<u>ภาคผนวกเราจะให้พิกัด xyz เป็นพิกัดที่ติดอยู่บนผิวโลก</u> หรือก็คือเป็นกรอบอ้างอิงที่มีความเร่งเนื่องจากการหมุน

สมมติมีพิกัดสองพิกัด พิกัดแรกคือ XYZ เป็นพิกัดที่อยู่นิ่ง มีจุดกำเนิดอยู่ที่กึ่งกลางโลก เวกเตอร์หน่วยของพิกัดนี้ คือ $\hat{I}, \hat{J}$ และ $\hat{K}$ ผู้สังเกตที่ติดกับพิกัดนี้เป็นผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง

อีกพิกัดคือ xyz ซึ่งมีเวกเตอร์หน่วยคือ $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ พิกัดนี้จะ<u>ติดอยู่ที่ใดก็ได้บนผิวโลก และจะเอียงอยู่อย่างไรก็ได้</u> เนื่องจากติดอยู่บนผิวโลกพิกัดนี้จึงหมุนไปพร้อมกับโลกด้วยความเร็วเชิงมุม $\bar{\omega}$ ซึ่งเป็นความเร็วเชิงมุมของโลก ดังรูป 1 ผู้สังเกตที่ติดกับพิกัด xyz นี้เป็นผู้สังเกตที่หมุน



รูป 1

ให้ $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในองค์ประกอบของพิกัด XYZ หรือ xyz ก็ได้ โดยเขียนได้เป็น

$$\bar{A} = A_X \hat{I} + A_Y \hat{J} + A_Z \hat{K} \tag{1}$$

หรือ

$$\bar{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \tag{2}$$

เมื่อ A_X, A_Y และ A_Z เป็นองค์ประกอบของ $\bar{A}$ ในแนว $\hat{I}, \hat{J}$ และ $\hat{K}$ ตามลำดับ

(นักศึกษาสังเกตว่าตัวห้อย X, Y และ Z นั้น เขียนด้วยตัวอักษรใหญ่)

และ A_x, A_y และ A_z เป็นองค์ประกอบของ $\bar{A}$ ในแนว $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ ตามลำดับ

(นักศึกษาสังเกตว่าตัวห้อย x, y และ z นั้น เขียนด้วยตัวอักษรเล็ก)

แม้ว่ามันจะเป็นการเยิ่นเย้อ แต่เพื่อความเข้าใจของนักศึกษา เราจะดูอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ ดังต่อไปนี้

---ถ้าดูจากสมการ(1) ผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบ xyz จะเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ เป็นดังนี้

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{rot} = \left(\frac{d}{dt}(A_X \hat{I} + A_Y \hat{J} + A_Z \hat{K})\right)_{rot}$$

$$= \left(\frac{dA_X}{dt}\right)_{rot} \hat{I} + A_X \left(\frac{d\,\hat{I}}{dt}\right)_{rot} + \left(\frac{dA_Y}{dt}\right)_{rot} \hat{J} + A_Y \left(\frac{d\,\hat{J}}{dt}\right)_{rot} + \left(\frac{dA_Z}{dt}\right)_{rot} \hat{K} + A_Z \left(\frac{d\,\hat{K}}{dt}\right)_{rot} \tag{3}$$

ในหัวข้อ 9.1.6.1 นักศึกษาได้เห็นแล้วว่าอนุพันธ์เทียบกับเวลาของสเกลาร์ ไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิง โดยอนุพันธ์เทียบกับเวลาที่ไม่ขึ้นกับกรอบอ้างอิงนี้เราจะเขียนจุดอยู่บนสเกลาร์ เราจึงจะเขียนสมการ(3) สั้นๆ เป็น

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{rot} = \dot{A}_X \hat{I} + \dot{A}_Y \hat{J} + \dot{A}_Z \hat{K} + A_X \left(\frac{d\,\hat{I}}{dt}\right)_{rot} + A_Y \left(\frac{d\,\hat{J}}{dt}\right)_{rot} + A_Z \left(\frac{d\,\hat{K}}{dt}\right)_{rot} \tag{4}$$

สมการที่(4) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงที่หมุน แม้เราจะเขียนสมการออกมาได้ แต่เราไม่ได้นำมันไปใช้ประโยชน์

---ถ้าดูจากสมการ(2) ผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบ xyz จะเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ เป็นดังนี้

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{rot} = \left(\frac{d}{dt}(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\right)_{rot}$$

$$= \left(\frac{dA_x}{dt}\right)_{rot}\hat{i} + A_x\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{rot} + \left(\frac{dA_y}{dt}\right)_{rot}\hat{j} + A_y\left(\frac{d\,\hat{j}}{dt}\right)_{rot} + \left(\frac{dA_z}{dt}\right)_{rot}\hat{k} + A_z\left(\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right)_{rot} \quad (5)$$

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{rot} = \dot{A}_x\hat{i} + A_x\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{rot} + \dot{A}_y\hat{j} + A_y\left(\frac{d\,\hat{j}}{dt}\right)_{rot} + \dot{A}_z\hat{k} + A_z\left(\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right)_{rot} \quad (6)$$

ผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงที่หมุน เขาอยู่ติดกับแกน *xyz* ไม่ว่าแกน *xyz* จะเคลื่อนที่อย่างไรก็ตาม เขาจะเห็นเวกเตอร์หน่วย $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ คงที่ อนุพันธ์ของเวกเตอร์หน่วยในสมการ(6) จึงเป็นศูนย์ สมการ(6) จะเหลือ

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{rot} = \dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k} \quad (7)$$

สมการที่(7) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงที่หมุน (หรือพูดให้ครอบคลุมกว่านี้คือผู้สังเกตที่มีความเร่ง) เมื่อเราจะบรรยายอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่มีความเร่ง เรามักใช้สมการนี้

---คราวนี้มาดูผู้สังเกตที่อยู่นิ่งกันบ้าง ถ้าดูจากสมการ(1) ผู้สังเกตที่อยู่นิ่งจะเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ เป็นดังนี้

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d}{dt}(A_X\hat{I} + A_Y\hat{J} + A_Z\hat{K})\right)_{fixed}$$

$$= \left(\frac{dA_X}{dt}\right)_{fixed}\hat{I} + A_X\left(\frac{d\,\hat{I}}{dt}\right)_{fixed} + \left(\frac{dA_Y}{dt}\right)_{fixed}\hat{J} + A_Y\left(\frac{d\,\hat{J}}{dt}\right)_{fixed} + \left(\frac{dA_Z}{dt}\right)_{fixed}\hat{K} + A_Z\left(\frac{d\,\hat{K}}{dt}\right)_{fixed}$$

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{fixed} = \dot{A}_X\hat{I} + A_X\left(\frac{d\,\hat{I}}{dt}\right)_{fixed} + \dot{A}_Y\hat{J} + A_Y\left(\frac{d\,\hat{J}}{dt}\right)_{fixed} + \dot{A}_Z\hat{K} + A_Z\left(\frac{d\,\hat{K}}{dt}\right)_{fixed} \quad (8)$$

ผู้สังเกตที่อยู่นิ่งติดกับแกน XYZ เขาเห็นเวกเตอร์หน่วย $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ คงที่ อนุพันธ์ของเวกเตอร์หน่วยในสมการ(8) จึงเป็นศูนย์ สมการ(8) จะเหลือ

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{fixed} = \dot{A}_X\hat{I} + \dot{A}_Y\hat{J} + \dot{A}_Z\hat{K} \qquad (9)$$

สมการที่(9) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง เมื่อเราจะบรรยายอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง เรามักใช้สมการนี้

---ต่อไปจะเป็นการดูจากสมการ(2) ซึ่งนักศึกษาจะเห็นว่าเราจะได้ความสัมพันธ์ที่เราจะนำไปใช้ประโยชน์

ถ้าดูจากสมการ(2) ผู้สังเกตที่อยู่นิ่งจะเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ เป็นดังนี้

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d}{dt}(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\right)_{fixed}$$

$$= \left(\frac{dA_x}{dt}\right)_{fixed}\hat{i} + A_x\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed} + \left(\frac{dA_y}{dt}\right)_{fixed}\hat{j} + A_y\left(\frac{d\,\hat{j}}{dt}\right)_{fixed} + \left(\frac{dA_z}{dt}\right)_{fixed}\hat{k} + A_z\left(\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right)_{fixed}$$

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{fixed} = \dot{A}_x\hat{i} + A_x\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed} + \dot{A}_y\hat{j} + A_y\left(\frac{d\,\hat{j}}{dt}\right)_{fixed} + \dot{A}_z\hat{k} + A_z\left(\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right)_{fixed}$$

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{fixed} = (\dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k}) + A_x\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed} + A_y\left(\frac{d\,\hat{j}}{dt}\right)_{fixed} + A_z\left(\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right)_{fixed} \qquad (10)$$

ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับในสมการ(10)นั้นแบ่งได้เป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรก

คือ $\dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k}$ และกลุ่มที่สองคือ $A_x\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed} + A_y\left(\frac{d\,\hat{j}}{dt}\right)_{fixed} + A_z\left(\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right)_{fixed}$

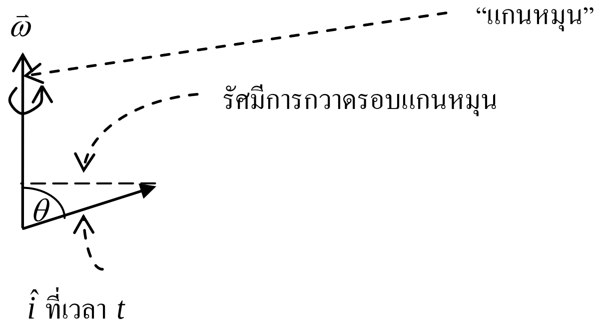
กลุ่มแรกก็คือสมการ(7) ซึ่งความหมายคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\bar{A}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่ในกรอบอ้างอิงที่หมุน ซึ่งเราจะใช้สัญลักษณ์ว่า $\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{rot}$ ดังนั้น สมการ(10) จะเป็น

$$\left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar{A}}{dt}\right)_{rot} + A_x\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed} + A_y\left(\frac{d\,\hat{j}}{dt}\right)_{fixed} + A_z\left(\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right)_{fixed} \qquad (11)$$

สำหรับกลุ่มที่สอง ก่อนอื่นเราจะหา $\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed}$, $\left(\frac{d\,\hat{j}}{dt}\right)_{fixed}$ และ $\left(\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right)_{fixed}$

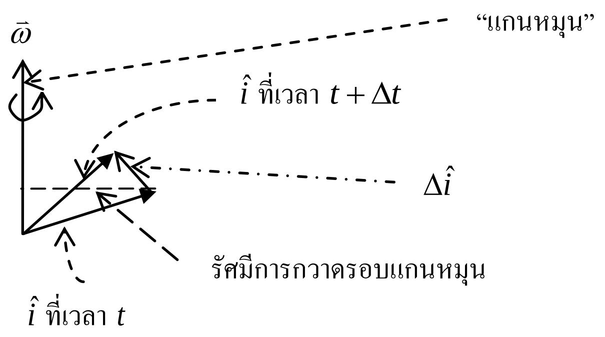
ดู $\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed}$ ซึ่งความหมายคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\hat{i}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง เนื่องจาก $\hat{i}$ เป็นเวกเตอร์หน่วย ขนาดของมันเท่าเดิมตลอดคือหนึ่งหน่วย มีแต่ทิศของมันเท่านั้นที่เปลี่ยน ที่ทิศเปลี่ยนเพราะแกน xyz หมุน ผู้สังเกตที่อยู่นิ่งจึงเห็นทิศของ $\hat{i}$ เปลี่ยนไป เราจะหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\hat{i}$

รูป 2 แสดง เวกเตอร์หน่วย $\hat{i}$ ที่เวลา t ใดๆ เรามองได้ว่า เวกเตอร์หน่วย $\hat{i}$ หมุนรอบ “แกนหมุน” ที่ผ่านหางของ $\hat{i}$ ด้วยความเร็วเชิงมุมเดียวกับที่โลกหมุน คือ $\vec{\omega}$ (ดูหมายเหตุ) ให้มุมที่ $\hat{i}$ ทำกับ “แกนหมุน” คือ θ ซึ่งมุมนี้อาจมีค่าใดๆก็ได้ ไม่จำเป็นต้องเป็นมุมฉาก นักศึกษาพิจารณาดูจะเห็นว่ารัศมีการกวาดที่ $\hat{i}$ กวาดรอบแกนหมุนคือ $|\hat{i}\sin\theta| = |\sin\theta|$ ทั้งนี้เพราะ $\hat{i}$ มีขนาดหนึ่งหน่วย



รูป 2 ในรูปตั้งใจวาดให้เห็นว่าเวกเตอร์หน่วยกับแกนหมุนไม่ได้ตั้งฉากกัน

เมื่อเวลาผ่านไปเล็กน้อย Δt เวกเตอร์หน่วย $\hat{i}$ จะเปลี่ยนไปเล็กน้อย $\Delta\hat{i}$ ดังในรูป 3 นักศึกษาพิจารณาดูจะเห็นว่าถ้า Δt <u>ไม่ย่างเข้าสู่ศูนย์</u> ทิศของ $\Delta\hat{i}$ จะ<u>เกือบพุ่ง</u>เข้าไปในกระดาษ แต่ถ้า Δt <u>ย่างเข้าสู่ศูนย์</u> ทิศของ $\Delta\hat{i}$ จะ<u>พุ่ง</u>เข้าไปในกระดาษ แต่เนื่องจากเราเขียนรูป $\Delta\hat{i}$ พุ่งเข้าไปในกระดาษไม่ได้ นักศึกษาจึงต้องจินตนาการเอาจากรูป 3 พึงระลึกว่ารูป 3 นี้ เป็นรูปที่ผู้สังเกตที่อยู่นิ่งเห็น



รูป 3 จริงๆแล้ว $\Delta\hat{i}$ เกือบพุ่งเข้าไปในกระดาษ

พิจารณาดูจะเห็นว่า

ขนาดของ $\Delta\hat{i}$ $\approx$ (รัศมีการกวาดรอบแกนหมุน) คูณ (ขนาดของความเร็วเชิงมุม) คูณ (เวลาที่เปลี่ยนไป)

คือ ขนาดของ $\Delta\hat{i} \approx \left(\left|\hat{i}\sin\theta\right|\right)\left(\left|\vec{\omega}\right|\right)\Delta t \;=\; \left|\vec{\omega}\times\hat{i}\right|\Delta t$

หารด้วย Δt จะได้ $\dfrac{\Delta\hat{i}}{\Delta t} \approx (\vec{\omega}\times\hat{i})$

ถ้าให้ลิมิตของ Δt ย่างเข้าสู่ศูนย์ ทางซ้ายมือจะกลายเป็น $\left(\dfrac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed}$ ซึ่งมีทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ

นักศึกษาจะเห็นว่าทั้งขนาดและทิศของ $\left(\dfrac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed}$ เป็นขนาดและทิศของ $\vec{\omega}\times\hat{i}$

ดังนั้น $$\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed} = \vec{\omega}\times\hat{i} \qquad (12)$$

ทำนองเดียวกัน จะได้ $$\left(\frac{d\,\hat{j}}{dt}\right)_{fixed} = \vec{\omega}\times\hat{j} \qquad (13)$$

และ $$\left(\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right)_{fixed} = \vec{\omega}\times\hat{k} \qquad (14)$$

จากสมการ (12) (13) และ (14) จะได้ว่า

$$A_x\left(\frac{d\,\hat{i}}{dt}\right)_{fixed} + A_y\left(\frac{d\,\hat{j}}{dt}\right)_{fixed} + A_z\left(\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right)_{fixed}$$

$$= \quad A_x\vec{\omega}\times\hat{i} + A_y\vec{\omega}\times\hat{j} + A_z\vec{\omega}\times\hat{k} = \vec{\omega}\times(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \quad = \quad \vec{\omega}\times\vec{A}$$

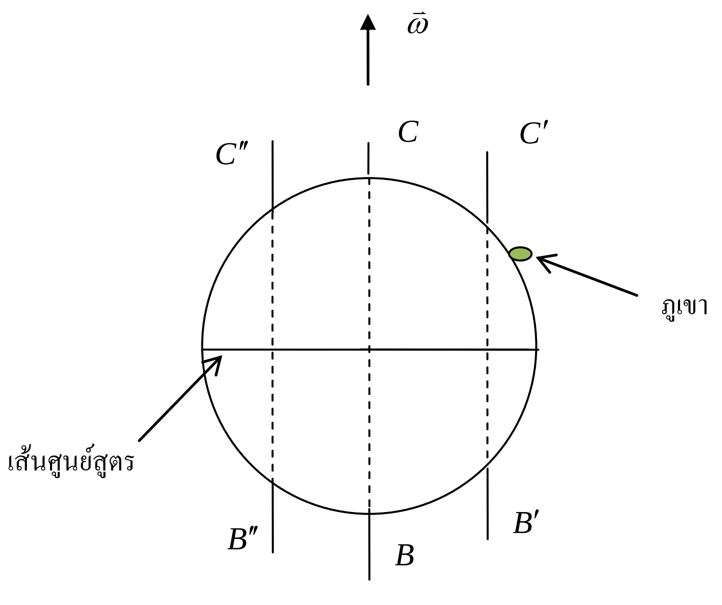
ดังนั้น สมการ (11) จะเป็น

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega}\times\vec{A} \qquad (15)^*$$

สมการ(15) เป็นสมการที่เราจะนำไปใช้ ถ้าจะกล่าวเป็นคำพูดก็คือ “สำหรับกรอบอ้างอิงสองกรอบ กรอบหนึ่งอยู่นิ่ง อีกกรอบหนึ่งติดอยู่บนผิวโลกซึ่งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใดๆ อ้างอิงกับกรอบที่อยู่นิ่ง จะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\vec{A}$ อ้างอิงกับกรอบที่ติดบนผิวโลก บวกกับ $\vec{\omega}\times\vec{A}$ ”

นักศึกษาควรดูการพิสูจน์ให้เข้าใจสักครั้งก็พอ จากนั้นก็จำสมการ(15)ไปใช้เลย

<u>หมายเหตุ</u> นักศึกษาอาจคิดว่าเมื่อโลกหมุน แกนหมุนคือแกนกลางของโลกแต่เพียงแกนเดียวซึ่งเป็นความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน เพื่อที่จะได้เข้าใจคำว่า “แกนหมุน” ในรูป 2 นักศึกษาลองดูการหมุนของโลกในรูป 4



รูป 4

เพื่อให้มองเห็นภาพอย่างชัดเจน ในรูป 4 เรา<u>เริ่มด้วยการสมมติว่า</u> CB คือแกนลวดที่<u>เสียบติดกับโลก</u>ไปตามแกนกลางของโลก $C'B'$ และ $C''B''$ ก็เป็นแกนลวดที่เสียบติดกับโลกและขนานกับแกน CB

ในเวลา 1 วัน ถ้า<u>ผู้สังเกตที่อยู่นอกโลก</u>เห็นภูเขาหมุนรอบแกน CB หนึ่งรอบในทิศทวนเข็มนาฬิกา ในเวลา 1 วันเขาก็จะเห็นภูเขาหมุนรอบแกน $C'B'$ หนึ่งรอบในทิศทวนเข็มนาฬิกา และเห็นภูเขาหมุนรอบแกน $C''B''$ หนึ่งรอบในทิศทวนเข็มนาฬิกา เช่นกัน (นักศึกษาที่ไม่เข้าใจอ่านเพิ่มเติมได้ใน “การหมุนในระนาบ” ที่เว็บไซต์ภาควิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศิลปากร)

เมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุน การกำหนดทิศของความเร็วเชิงมุมเขาตกลงกันว่า กำมือขวาให้นิ้วทั้งสี่ (นิ้วชี้ กลาง นาง ก้อย)ไปตามการหมุน ทิศที่หัวแม่มือชี้ให้เป็นทิศของความเร็วเชิงมุม โลกหมุนจากตะวันตกไปตะวันออก ดังนั้นทิศของความเร็วเชิงมุมของโลก $\vec{\omega}$ <u>ไม่ว่ารอบแกนหมุน CB หรือ $C'B'$ หรือ $C''B''$</u> จึงมีทิศชี้ขึ้นข้างบนดังในรูป 4 โดยมีขนาด $\omega = \dfrac{2\pi}{(24)(60)(60)} = 7.3\times10^{-5}$ เรเดียนต่อวินาที แต่เนื่องจากหนังสือต่างๆนิยมวาด $\vec{\omega}$ ไว้ตรงแกนโลก รูป 4 จึงวาดไว้ตรงแกนโลกเช่นกัน

ซึ่งก็คือเรามองได้ว่าโลกหมุนรอบแกน CB หรือ $C'B'$ หรือ $C'B'$ ด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ เดียวกัน คือมีขนาดเป็น 7.3×10^{-5} เรเดียนต่อวินาที ทิศชี้ขึ้นไปตามแกนโลก

คราวนี้ถอดแกนลวดออกจากโลก แต่จินตนาการแทนว่ามี<u>แกนที่เสียบติดกับโลก</u>ไปตามแนว CB หรือ $C'B'$ หรือ $C'B'$ หรืออื่นๆอีกนับไม่ถ้วนแกนที่ติดไปกับโลกและขนานกับ CB แกนเหล่านี้ล้วนแล้วแต่เป็นแกนที่โลกหมุนรอบด้วยความเร็วเชิงมุมเดียวกัน เมื่อย้อนไปดูรูป 2 ซึ่งกรอบอ้างอิงหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ คำว่า “แกนหมุน” จึงหมายถึงแกนในจินตนาการที่ผ่านหางของเวกเตอร์หน่วย $\hat{i}$ เราจึงพิจารณาได้ว่าเวกเตอร์หน่วย $\hat{i}$ หมุนรอบแกนนี้ด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ ดังที่ได้พิจารณาในรูป 2
