เอกสารประกอบการเรียน

การหมุนในระนาบ
(Plane Rotation)

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล

ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยศิลปากร

2561

คำนำ

นานมาแล้วเมื่อครั้งที่ผู้เขียนยังไม่เกษียณอายุราชการ ในการอบรมครูฟิสิกส์ครั้งหนึ่งได้มีโอกาสถามครูท่านหนึ่งว่าสงสัยเรื่องอะไรมากที่สุด ครูท่านนั้นตอบว่าการหมุน อ่านหลายรอบแล้วก็ไม่เข้าใจ ความเห็นนี้คล้ายกับครูอีกหลายท่าน บางคนถึงกับบอกว่าควรตัดออกจากหลักสูตรระดับมัธยมปลายเพราะยากเกินกว่าที่เด็กนักเรียนจะเข้าใจ สิ่งที่ผู้เขียนรู้สึกไม่แน่ใจคือเนื้อหามันยากหรือว่าครูไม่ได้รับการอธิบายให้ฟังอย่างแจ่มแจ้ง หรือทั้งสองอย่างผสมกัน อย่างไรก็ตามผู้เขียนเชื่อว่ามีครูจำนวนมากเป็นครูที่มีศักยภาพ แต่พวกเขาเหล่านั้นไม่เข้าใจเพราะไม่เคยฟังการอธิบายในแบบที่จะให้เข้าใจ ดังนั้นเมื่อภาควิชาฟิสิกส์มหาวิทยาลัยศิลปากรได้ร่วมกับคณะศึกษาศาสตร์เปิดหลักสูตรครูฟิสิกส์ซึ่งในขณะนี้(มีนาคม 2562) มีนักศึกษา 2 รุ่น แม้ในหลักสูตรปรับปรุงใหม่(2560) จะไม่มีเรื่องการหมุนแต่สำหรับครูที่ติวค่าย 1 ฟิสิกส์โอลิมปิกจะต้องรู้เรื่องการหมุน ผู้เขียนจึงเรียบเรียงและเขียนเอกสารประกอบการเรียนเรื่อง “การหมุนในระนาบ” นี้ขึ้นมา นอกจากครูฟิสิกส์แล้วยังหวังว่าจะเป็นประโยชน์แก่นักศึกษา วท.บ ฟิสิกส์และนักเรียนมัธยมที่สนใจฟิสิกส์อีกด้วย เพื่อให้หาอ่านได้ง่ายจึงลงไว้ในเว็บไซต์ของภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

การหมุนในระนาบเป็นการหมุนอย่างง่ายที่จุดใดๆบนวัตถุจะเคลื่อนที่ในระนาบหนึ่ง หรือก็คือทิศของของเร็วเชิงมุมไม่เปลี่ยนแนวตลอดเวลาในการหมุน การหมุนแบบนี้เป็นการหมุนที่เรียนในระดับมัธยมศึกษาและเรียนอีกครั้งในชั้นปีที่ 1 ของมหาวิทยาลัย วิธีหลักๆที่ใช้แก้ปัญหาของการหมุนในระนาบจะมี 3 วิธีคล้ายๆกับของการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่คือ ก)ใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองซึ่งมีสมการคือ $\tau = I\,\alpha$ ข)ใช้งาน-พลังงาน รวมทั้งกฎการอนุรักษ์พลังงาน ค) ใช้การดลเชิงมุม-โมเมนตัมเชิงมุม รวมทั้งกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

หนังสือส่วนใหญ่ใช้วิธีง่ายๆในการหาที่มาของสมการ $\tau = I\,\alpha$ คงเป็นเพราะไม่ต้องการใช้วิธีที่ยืดยาวและซับซ้อน แต่ความง่ายทำให้ขาดความแจ่มแจ้ง ตัวอย่างเช่น

1. ไม่รู้ว่าจุดอ้างอิงที่ตนเองใช้อยู่นั้นเป็นจุดที่ติดไปกับวัตถุหรืออยู่นอกวัตถุ
2. ทำไมจึงใช้สมการ $\tau = I\,\alpha$ กับการหมุนของลูกข่างไม่ได้
3. ทำไมในโจทย์จึงมักเป็นวัตถุสม่ำเสมอ เช่นทรงกระบอกสม่ำเสมอ ทรงกลมสม่ำเสมอ ถ้าไม่สม่ำเสมอจะเป็นอย่างไร

4. ทำไมจึงมักเขียนรูปวัตถุและแรงเป็นรูปแบนในระนาบของกระดาษทั้งที่จริงๆแล้ววัตถุมี 3 มิติและแรงที่กระทำต่อวัตถุอาจกระจายตามตำแหน่งของวัตถุ ตัวอย่างเช่นทรงกระบอกกลิ้งลงมาตามพื้นเอียง แรงเสียดทานที่พื้นเอียงกระทำต่อทรงกระบอกกระจายตามผิวสัมผัสที่ทรงกระบอกแตะกับพื้นเอียง แต่เรารวมแรงเสียดทานทั้งหมดเป็นแรงเดียวแล้วเขียนแรงรวมนี้ลงในกระดาษ และเขียนทรงกระบอกเป็นเพียงแค่จานกลมในกระดาษ

5. ทิศของโมเมนตัมเชิงมุมชี้ทิศเดียวกับความเร็วเชิงมุมเสมอไปหรือไม่

6. ขนาดของโมเมนตัมเชิงมุม $L = I\omega$ เสมอไปหรือไม่

ข้อบกพร่องอีกอย่างหนึ่งที่ผู้เขียนเห็นว่าเป็นเรื่องสำคัญคือการใช้วิธีง่ายๆในการหาที่มาของสมการ $\tau = I\alpha$ ทำให้นักศึกษาไม่มีพื้นฐานที่จะนำไปสู่สมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์ซึ่งเป็นสมการหลักในการแก้ปัญหาการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งของทั้งทางฟิสิกส์และวิศวกรรม ยิ่งไปกว่านั้นนักศึกษาจะสับสนกับความรู้เดิมของวิธีง่ายๆเมื่อเขาเริ่มเรียนสมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์ เมื่อครั้งที่ผู้เขียนเขียนตำรา "กลศาสตร์"ก็เคยลังเลใจว่าจะเลือกวิธีใดในการหาที่มาของสมการ $\tau = I\alpha$ และได้เลือกวิธีกลางๆไม่ให้ซับซ้อนนัก แต่ภายหลังพบว่าทั้งวิธีง่ายๆของหนังสือทั่วไปและวิธีกลางๆที่เคยเลือก ไม่น่าเป็นวิธีที่เหมาะสม ปัจจุบันผู้เขียนคิดว่าวิธีในการหาที่มาของสมการ $\tau = I\alpha$ ที่ทั้งรัดกุมและใช้เป็นฐานความรู้ได้คือวิธีการหาสมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์ โดยทั่วไปแล้วหนังสือต่างๆมักทำในรายละเอียดของคณิตศาสตร์แต่ไม่บรรยายภาพทางฟิสิกส์ประกอบ ทำให้ผู้อ่านรู้สึกว่ามันเป็นเรื่องยากกว่าที่ควรจะเป็น ทั้งที่อันที่จริงแล้วมันเป็นเพียงแต่การทำคณิตศาสตร์ไปตรงๆ ขอแนะนำว่าควรดูในรายละเอียดในการทำคณิตศาสตร์ให้เข้าใจสักครั้งก็พอ โดยส่วนสำคัญที่จะนำไปใช้นั้นอยู่ในสรุป ในการสอนครูควรเลือกสอนให้เหมาะกับนักเรียนและอาจข้ามรายละเอียดของคณิตศาสตร์เพราะใช้เวลามาก ครูไม่จำเป็นต้องสอนทุกอย่างที่ตนเองรู้เพราะนักเรียนส่วนใหญ่อาจฟังไม่รู้เรื่อง อนึ่ง เอกสารนี้ไม่ได้เน้นแบบฝึกหัด ผู้อ่านสามารถใช้แบบฝึกหัดจากหนังสือเล่มอื่น

เพื่อประโยชน์ของนักเรียนนักศึกษา ผู้อ่านที่พบเห็นข้อผิดพลาดสามารถให้คำแนะนำที่ถูกต้องหรือคิดว่าถูกต้องได้ในเว็บไซต์ของภาควิชาฟิสิกส์

ขอขอบคุณ ดร.ดุจดาว จารุจิตติพันธ์ ที่ได้ช่วยตรวจทานเอกสารเล่มนี้

ผศ.ดร.ธีระพันธุ์ สันติเทวกุล

การหมุนในระนาบ

(Plane Rotation, ฉบับของอาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์)

การหมุนในระนาบเป็นการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งที่จุดใดๆบนวัตถุจะเคลื่อนที่ในระนาบ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งคือทิศของความเร็วเชิงมุมจะอยู่ในแนวเดิมตลอดเวลา ตัวอย่างเช่นการหมุนของคานรอบแกนตรึง การกลิ้งไปตรงๆแบบไม่เลี้ยวของทรงกระบอก หรือทรงกลม เป็นต้น ส่วนการหมุนที่ไม่ใช่การหมุนในระนาบเช่นการกลิ้งของกรวย การหมุนของลูกข่าง

ในเอกสารนี้อนุพันธ์<u>เทียบกับเวลา</u>อาจเขียนสั้นๆโดยใช้จำนวนจุดบอกอันดับของอนุพันธ์ ตัวอย่างเช่น $\frac{d\vec{L}}{dt}$ เขียนสั้นๆเป็น $\dot{\vec{L}}$ หรือ $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ เขียนสั้นๆเป็น $\ddot{\vec{r}}$ เป็นต้น เนื่องจากนักศึกษาอาจไม่คุ้นชินกับสมบัติบางประการของจุดศูนย์กลางมวล(CM) และการใช้ summation จึงจะกล่าวถึงพร้อมยกตัวอย่างง่ายๆให้เห็น อันที่จริงแล้วจุดศูนย์กลางมวลมีสมบัติเฉพาะตัวหลายอย่าง แต่เราจะกล่าวเพียงบางอย่างเพื่อจะนำไปใช้ในเอกสารนี้

ในการพิจารณาวัตถุแข็งเกร็งบ่อยครั้งที่เราเริ่มพิจารณาจากระบบอนุภาคเพราะมันเห็นได้ชัดเจนและจำได้ง่ายกว่ากรณีวัตถุแข็งเกร็ง เมื่อจะเปลี่ยนเป็นวัตถุแข็งเกร็งก็เพียงแต่เปลี่ยนการรวมจาก summation เป็นการรวมด้วยการอินทิเกรต

สมมติมีอนุภาค N ตัว คือตัวที่ 1,2,…, N การจะกล่าวถึงอนุภาคตัวหนึ่งโดยไม่ระบุเจาะจงว่าเป็นตัวใดเรานิยมห้อยด้วย i หรือ j หรืออื่นๆในการบรรยาย ในที่นี้เราจะใช้อักษรกรีก “นิว” คือ υ เราเรียกอนุภาคตัวนี้ว่าอนุภาคตัวที่ “นิว” มวลของอนุภาคตัวนี้เขียนเป็น m_υ เวกเตอร์ตำแหน่งเขียนเป็น $\vec{r}_\upsilon$ เป็นต้น นักศึกษาควรแยกให้ออกระหว่างอักษร “วี” v หรือ $\vec{v}$ กับ“นิว” υ ซึ่งมีส่วนคล้ายกัน

ระบบอนุภาคซึ่งประกอบด้วยอนุภาค N ตัว ให้แต่ละตัวมีมวล $m_1, m_2, ..., m_N$ มีเวกเตอร์ตำแหน่ง(จุดกำเนิดอยู่ที่ใดก็ได้) $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N$ ตามลำดับ ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลเราบอกด้วยเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}_{CM}$ ซึ่งนิยามดังนี้

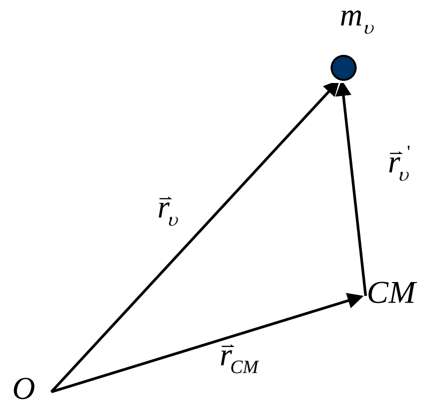
$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N} \qquad (1)$$

สมการ 1 เขียนย่อๆโดยใช้เครื่องหมาย summation เป็น

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{\upsilon=1}^{N} m_\upsilon \vec{r}_\upsilon}{\sum_{\upsilon=1}^{N} m_\upsilon} \quad \text{หรือ อาจเขียนเพียง} \quad = \frac{\sum_{\upsilon} m_\upsilon \vec{r}_\upsilon}{\sum_{\upsilon} m_\upsilon} \qquad (2)$$

เราจะใช้สัญลักษณ์ “prime” บอกอะไรก็ตามที่อ้างอิงกับ CM ตัวอย่างเช่นเวกเตอร์ตำแหน่งและความเร็วของอนุภาคตัวที่ υ อ้างอิงกับ CM เขียนเป็น $\vec{r}_\upsilon'$ และ $\vec{v}_\upsilon'$ เป็นต้น

ในการเขียนรูปถ้าเขียนอนุภาคหลายๆตัวอาจดูสับสน เราอาจเขียนแค่จุดศูนย์กลางมวล และตัวแทนของอนุภาคตัวเดียวคือตัวที่ υ ก็พอแล้ว รูปที่1 แสดงเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล คือ $\vec{r}_{CM}$ และของอนุภาคตัวที่ υ คือ $\vec{r}_\upsilon$



รูปที่ 1

จากรูปจะเห็นว่า $\vec{r}_\upsilon' = \vec{r}_\upsilon - \vec{r}_{CM}$ เมื่อคูณด้วย m_υ จะได้ $m_\upsilon \vec{r}_\upsilon' = m_\upsilon(\vec{r}_\upsilon - \vec{r}_{CM})$

เมื่อรวมของอนุภาคทุกตัว คือ $\sum_{\upsilon} m_\upsilon \vec{r}_\upsilon' = \sum_{\upsilon} m_\upsilon(\vec{r}_\upsilon - \vec{r}_{CM})$ (3)

จากสมการ 1 จะเห็นว่า $m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_{CM}) + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_{CM}) + \ldots + m_N(\vec{r}_N - \vec{r}_{CM}) = \sum_{\upsilon} m_\upsilon(\vec{r}_\upsilon - \vec{r}_{CM}) = 0$

สมการ 3 จึงเป็น $\sum_{\upsilon} m_\upsilon \vec{r}_\upsilon' = 0$ (4)**

หาอนุพันธ์สมการ 4 เทียบกับเวลา จะได้ $\sum_{\upsilon} m_\upsilon \vec{v}_\upsilon' = 0$ (5)**

สมการ 4 และ 5 เป็นสมการที่ต่อไปเราจะนำไปใช้ สมการ 5 นั้นความหมายคือผลรวมของโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอ้างอิงกับ CM จะเท่ากับศูนย์เสมอ

ในกรณีของวัตถุแข็งเกร็งเราเปลี่ยน summation เป็นอินทิเกรต สมการ(2) (4) และ(5) ก็จะกลายเป็น $\vec{r}_{CM} = \dfrac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$, $\int \vec{r}'\, dm = 0$ และ $\int \vec{v}'\, dm = 0$

<u>หมายเหตุ</u> ถ้านักศึกษาดู summation ไม่ออก ให้กระจายดูสัก 3-4 พจน์ จะมองเห็น ตัวอย่างเช่น

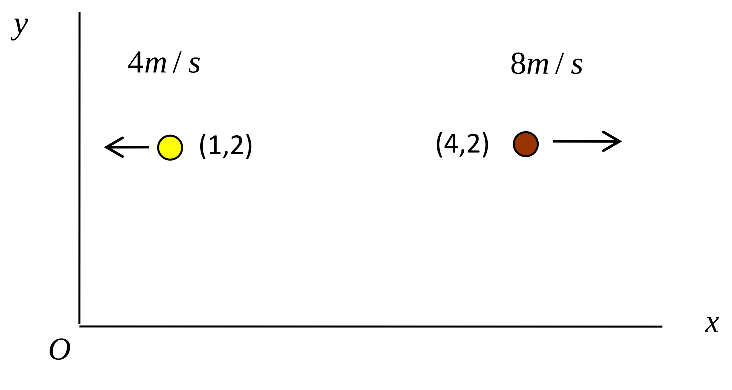
$$\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}_{CM} \times \vec{v}'_{\upsilon} = m_1 \vec{r}_{CM} \times \vec{v}'_1 + m_2 \vec{r}_{CM} \times \vec{v}'_2 + m_3 \vec{r}_{CM} \times \vec{v}'_3 + \ldots = \vec{r}_{CM} \times \{\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{v}'_{\upsilon}\}$$

ซึ่งจะเท่ากับศูนย์เพราะ $\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{v}'_{\upsilon} \quad = \quad 0$

ตัวอย่างที่1 อนุภาค 2 ตัวมวล 2 กิโลกรัมและ 4 กิโลกรัม เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ณ เวลาหนึ่งอยู่ห่างกัน 3 เมตร ตัวแรกเคลื่อนไปทางซ้ายด้วยความเร็ว 4 เมตรต่อวินาที ตัวที่สองเคลื่อนไปทางขวาด้วยความเร็ว 8 เมตรต่อวินาที

ก)จงหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล ข) จงแสดงว่า $\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}'_{\upsilon} = 0$ ค) จงแสดงว่า $\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{v}'_{\upsilon} = 0$

<u>วิธีทำ</u> ให้จุดกำเนิดอยู่ตรงไหนก็ได้เวกเตอร์ตำแหน่งของ CM อาจแตกต่างกันเพราะเวกเตอร์ตำแหน่งขึ้นกับจุดกำเนิด แต่ตำแหน่งของ CM จะเป็นตำแหน่งเดียวกัน ในรูป ต.ย.1 เราให้จุดกำเนิดและสร้างพิกัดฉาก xy อยู่ตรงตำแหน่งที่ทำให้อนุภาคตัวแรกมีพิกัด (1,2) เมตร อนุภาคตัวที่สองมีพิกัด (4,2) เมตร



รูป ต.ย.1

ก)จากนิยามของ $\vec{r}_{CM}$ ในสมการ 1 พิกัด x และ y ของ CM จะเป็นดังนี้

$$x_{CM} = \frac{(2\,kg)(1m)+(4\,kg)(4\,m)}{(2kg)+(4kg)} = 3 \text{ เมตร} \qquad y_{CM} = \frac{(2kg)(2m)+(4kg)(2m)}{(2kg)+(4kg)} = 2 \text{ เมตร}$$

$$\therefore \qquad \vec{r}_{CM} = 3\,\hat{i} + 2\,\hat{j} \text{ เมตร}$$

คือตำแหน่งของ CM อยู่บนแนวเส้นตรงที่เชื่อมมวลทั้งสอง โดยห่างจากมวลก้อนแรก 2 เมตร ห่างจากมวลก้อนที่สอง 1 เมตร ไม่ว่าจุดกำเนิดของพิกัดฉากจะอยู่ที่ใดตำแหน่งของ CM จะอยู่ที่เดียวกัน ตัวอย่างเช่นถ้าให้จุดกำเนิดทับกับมวล 2 กิโลกรัม จะได้ $x_{CM} = \frac{(2\,kg)(0\,m)+(4\,kg)(3\,m)}{(2kg)+(4kg)} = 2$ เมตร และ $y_{CM} = \frac{(2kg)(0m)+(4kg)(0m)}{(2kg)+(4kg)} = 0$ เมตร ซึ่ง CM เป็นจุดเดิมนั่นเอง

ข) $\vec{r}_1{}' = \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = (1\hat{i} + 2\hat{j}) - (3\,\hat{i} + 2\,\hat{j}) = -2\hat{i}$ เมตร

$\vec{r}_2{}' = \vec{r}_2 - \vec{r}_{CM} = (4\hat{i} + 2\hat{j}) - (3\,\hat{i} + 2\,\hat{j}) = \hat{i}$ เมตร

$$\sum_{\upsilon} m_{\upsilon}\vec{r}_{\upsilon}{}' = (2kg)(-2\,\hat{i}\;m) + (4kg)(1\hat{i}\;m) = 0$$

ค) จากสมการ 1 $\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

เมื่อดูในแต่ละองค์ประกอบจะได้ $v_{CM,x} = \frac{(2kg)(-4\;\;m/s)+(4kg)(8\;\;m/s)}{(2kg)+(4kg)} = 4$ เมตรต่อวินาที

และได้ $v_{CM,y} = 0$ ดังนั้น $\vec{v}_{CM} = 4\,\hat{i}$ เมตรต่อวินาที

$\vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = (-4\hat{i}\;m/s) - (4\,\hat{i}\;m/s) = -8\hat{i}$ เมตรต่อวินาที

$\vec{v}_2{}' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = (8\hat{i}\;m/s) - (4\,\hat{i}\;m/s) = 4\hat{i}$ เมตรต่อวินาที

$$\sum_{\upsilon} m_{\upsilon}\vec{v}_{\upsilon}{}' = (2kg)(-8\hat{i}\;m/s) + (4kg)(4\hat{i}\;m/s) = 0$$

ขณะนี้นักศึกษาคงพอมองสมการ(4)และ(5) ออกแล้ว ต่อไปนี้เราจะเริ่มจากการแนะนำปริมาณที่ใช้บรรยายการหมุนในหัวข้อที่1 หัวข้อที่ 2 เป็นสมการการเคลื่อนที่สำหรับการเคลื่อนที่แบบหมุนหรือเรียก

อีกอย่างหนึ่งว่ากฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองแบบหมุน หัวข้อที่3 เรื่องงาน-พลังงาน หัวข้อที่ 4 เรื่องการดลเชิงมุม-โมเมนตัมเชิงมุม และสุดท้ายหัวข้อที่ 5 จะเป็นตัวอย่าง

1.ปริมาณที่ใช้บรรยายการเคลื่อนที่แบบหมุน

ปริมาณที่ควรรู้คือ1.ทอร์ก 2.ความเร็วเชิงมุม 3.โมเมนตัมเชิงมุม 4.moments of inertia (โมเมนต์ความเฉื่อย) และ products of inertia ทุกปริมาณถ้าไม่อ้างอิงเทียบกับจุดก็จะอ้างอิงเทียบกับแกน ดังนั้นถ้าจุดหรือแกนอ้างอิงเปลี่ยนไป ปริมาณนั้นก็จะเปลี่ยนไป ยกเว้นความเร็วเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งซึ่งมีสมบัติไม่ขึ้นกับแกน เพราะถ้าวัตถุหมุนรอบแกนๆหนึ่งเราอาจมองได้ว่าวัตถุนั้นหมุนรอบแกนจำนวนนับไม่ถ้วนแกนด้วยความเร็วเชิงมุมเดียวกัน โดยแกนเหล่านี้เป็นแกนที่ติดไปกับวัตถุและขนานกับแกนหมุนเดิม

1.1 ทอร์ก (Torque)

1.1.1ทอร์กที่กระทำต่ออนุภาคตัวเดียว

สมมติมี<u>อนุภาคตัวเดียว</u>มวล m ถูกแรง $\vec{F}$ กระทำ เรานิยาม(ตกลงกัน)ว่าทอร์ก $\vec{\tau}$ ที่กระทำต่ออนุภาค คือ cross product ระหว่างเวกเตอร์ตำแหน่งและแรง ดังนี้

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (1.1.1)$$

เมื่อ $\vec{r}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาค แน่นอนว่ามันขึ้นกับจุดอ้างอิง(บางครั้งเรียกจุดกำเนิด) เมื่อจุดอ้างอิงเปลี่ยนเวกเตอร์ตำแหน่งก็เปลี่ยน ทอร์กก็จะเปลี่ยนตามไปด้วย จำง่ายๆว่า <u>ทอร์กเป็นปริมาณที่อ้างอิงเทียบกับจุด</u> เมื่อจุดอ้างอิงเปลี่ยน ทอร์กก็เปลี่ยน

1.1.2ทอร์กที่กระทำต่อระบบอนุภาค

ระบบอนุภาคคือระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไปซึ่งอยู่ห่างกันไม่ได้เรียงชิดติดกัน ระยะห่างระหว่างอนุภาคจะคงที่หรือไม่ก็ได้

ในกรณีของระบบอนุภาคแรงที่ทำต่ออนุภาคแต่ละตัวจะมีทั้งแรงภายนอกระบบและแรงภายในระบบ แต่ในหัวข้อ 1.3 นักศึกษาจะพบว่าทอร์กของแรงภายในระบบจะหักล้างกันไปเหลือเฉพาะทอร์กของแรงภายนอกระบบ เราจึงจะสนใจเฉพาะทอร์กของแรงภายนอกระบบ

ให้อนุภาคตัวที่ υ มีเวกเตอร์ตำแหน่งคือ $\vec{r}_\nu$ อนุภาคตัวนี้ถูกแรงภายนอกระบบ $\vec{F}_\upsilon^{ext}$ กระทำ ทอร์กของแรงภายนอกระบบ $\vec{\tau}_\upsilon$ ที่กระทำต่ออนุภาคตัวที่ υ จะเป็นดังนี้

$$\vec{\tau}_\upsilon = \vec{r}_\upsilon \times \vec{F}_\upsilon^{ext}$$

เรานิยาม ทอร์ก(ของแรงภายนอกระบบ) $\vec{\tau}$ ที่กระทำต่อระบบอนุภาคว่าเป็นผลรวม(แบบเวกเตอร์) ของทอร์กที่กระทำต่ออนุภาคแต่ละตัว คือ

$$\vec{\tau} = \sum_{\upsilon=1}^{N} \vec{r}_\upsilon \times \vec{F}_\upsilon^{ext} \qquad (1.1.2)$$

โดยเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคแต่ละตัว อ้างอิงเทียบกับจุดอ้างอิงเดียวกัน

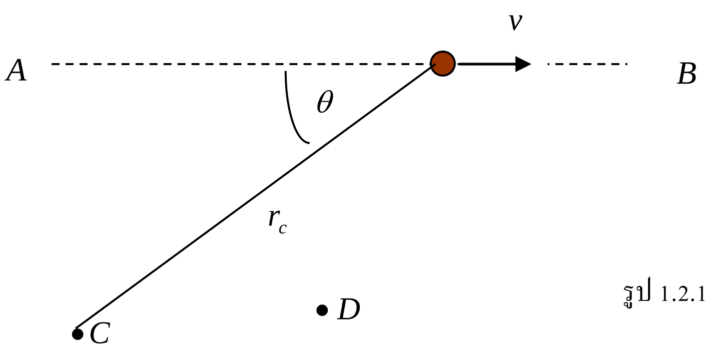
1.2 ความเร็วเชิงมุม

ปกติแล้วถ้าพูดถึงความเร็วเชิงมุมเราจะหมายถึงความเร็วเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็ง แต่ในบางครั้งมีการใช้ความเร็วเชิงมุมกับอนุภาค จึงจะกล่าวถึงทั้งสองกรณี

1.2.1 ความเร็วเชิงมุมของอนุภาค

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี R โดยมีอัตราเร็วเชิงเส้นในแนวตั้งฉากกับรัศมีเป็น $v_\perp$ ความสัมพันธ์ระหว่าง $v_\perp$ กับอัตราเร็วเชิงมุม ω คือ $v_\perp = \omega R$ เราจะใช้ความรู้นี้หาอัตราเร็วเชิงมุมของอนุภาคในกรณีที่อนุภาคไม่ได้เคลื่อนที่เป็นวงกลม โดยหา $v_\perp$ แล้วหารด้วยรัศมี R ก็จะได้ ω ของอนุภาค อย่างไรก็ตามเรามักใช้เฉพาะขนาดของมันจึงไม่นิยมกำหนดทิศให้กับมัน คือไม่สนใจว่ามันจะเป็นเวกเตอร์หรือไม่

พิจารณาอนุภาคเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยอัตราเร็ว v ในแนว AB ส่วน C และ D เป็นจุดใดๆ ดังรูป 1.2.1



รูป 1.2.1

สมมติเราจะหาอัตราเร็วเชิงมุมของอนุภาคนี้อ้างอิงกับจุด C จะเห็นว่ารัศมีคือ r_C ส่วน $v_\perp = v\sin\theta$ ดังนั้น $\omega_C = \dfrac{v\sin\theta}{r_C}$

เมื่อพิจารณาเช่นเดียวกันนี้โดยอ้างอิงกับจุด D จะเห็นว่า $\omega_D > \omega_C$

และจะเห็นว่า $\omega_A = \omega_B = 0$ เพราะ $v_\perp = 0$

1.2.2 ความเร็วเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็ง

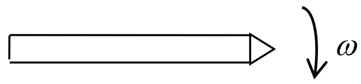
ผู้อ่านสามารถอ่านพื้นฐานของเวกเตอร์ได้จาก “บางมุมมองของเวกเตอร์” ในเว็บไซต์ของภาควิชาฟิสิกส์

เวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีขนาดและทิศทาง(หรือสามารถตกลงทิศให้เป็นที่เข้าใจตรงกันได้) <u>และประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน</u> ปริมาณที่มีขนาดและทิศแต่ไม่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่ใช่เวกเตอร์ ซึ่งก็คือจะไปใช้ประโยชน์จากองค์ประกอบของเวกเตอร์ การแตกเวกเตอร์ และพีชคณิตของเวกเตอร์ ไม่ได้

ผู้ที่เริ่มเรียนการหมุนอาจสงสัยว่าความเร็วเชิงมุมเป็นเวกเตอร์ได้อย่างไรเพราะมองหาทิศของมันไม่เจอ เพื่อความเข้าใจลองพิจารณาเข็มวินาทีของนาฬิกา เรารู้ว่าอัตราการกวาดของเข็มวินาทีคือ $\dfrac{2\pi}{60}$ เรเดียน ต่อวินาที คือมันมีขนาด ถ้าเรากำหนดทิศให้มัน มันก็จะมีทั้งขนาดและทิศทาง และถ้ามันประพฤติตัวตามการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน มันก็เป็นเวกเตอร์

การกำหนดทิศของความเร็วเชิงมุมเราตกลงกันให้เป็นไปตามกฎมือขวา โดยกำมือขวาให้นิ้วทั้งสี่(ยกเว้นหัวแม่มือ)วนไปตามการหมุน <u>ทิศที่หัวแม่มือชี้ตกลงกันให้เป็นทิศของความเร็วเชิงมุม</u> ดังนั้น

ความเร็วเชิงมุมของเข็มวินาทีจึงมีทิศพุ่งตั้งฉากเข้าไปในหน้าปัดนาฬิกา อย่างไรก็ตามบางครั้งในรูปวาดแทนที่จะบอกทิศของความเร็วเชิงมุมแต่กลับบอกทิศของการหมุนด้วยลูกศรโค้งพร้อมเขียน ω กำกับไว้ ดังรูป 1.2.2

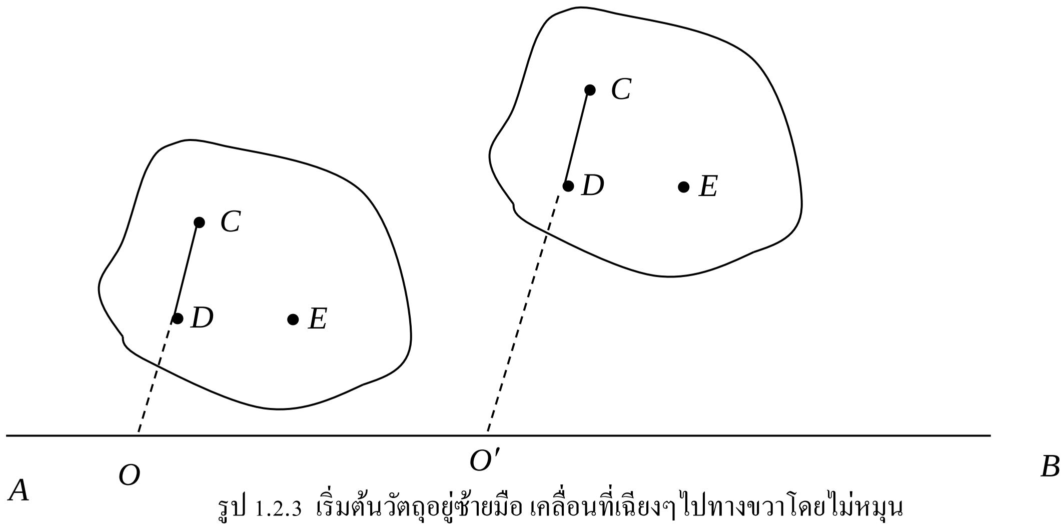


รูป **1.2.2** โคนเข็มอยู่ซ้ายสุดของเข็ม ลูกศรโค้งบอกทิศของการหมุนของเข็มนาฬิกา ทิศของความเร็วเชิงมุมตกลงกันให้พุ่งเข้าไปในกระดาษ

การแสดงว่าความเร็วเชิงมุมประพฤติตัวตามการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้นทำได้ด้วยการพิสูจน์ โดยถ้าวัตถุหมุนรอบแกนสองแกนพร้อมๆกัน ตำแหน่งของจุดต่างๆบนวัตถุจะเทียบเท่ากับการหมุนรอบแกนๆเดียวซึ่งได้จากการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนานของการหมุนรอบสองแกนแรก อย่างไรก็ตามจะไม่ขอกล่าวรายละเอียดในที่นี้ นักศึกษาที่สนใจหาอ่านได้โดยง่ายในเว็บไซต์ 3D Rigid Body Kinematics-MIT OpenCourseWare หรือในหนังสือกลศาสตร์ที่ได้แสดงการพิสูจน์นี้ไว้

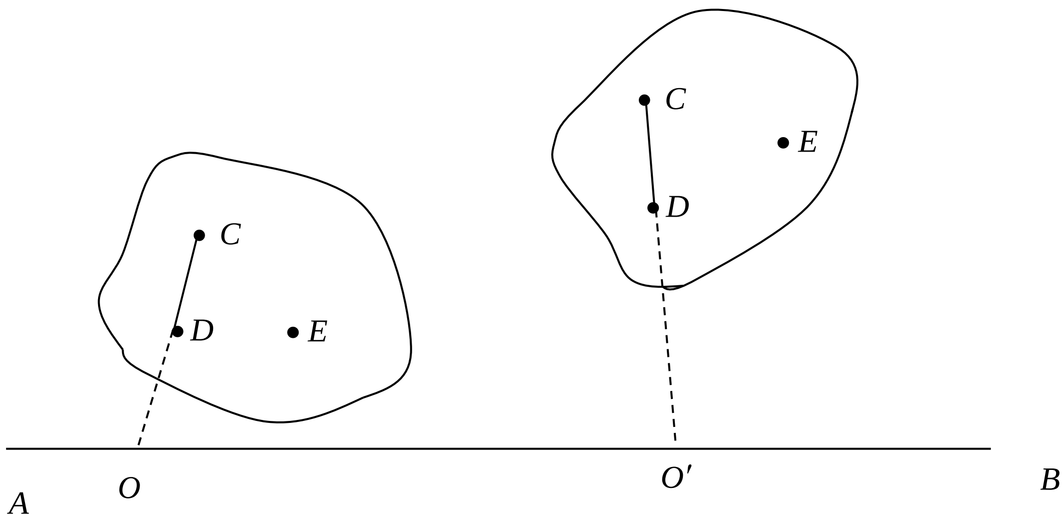
ขณะนี้เรารู้แล้วว่าความเร็วเชิงมุมเป็นเวกเตอร์ แต่เรายังไม่ได้พิจารณาให้ละเอียดว่าที่เรียกกันว่า "หมุนหรือไม่หมุน" นั้นเป็นอย่างไร รวมทั้งยังไม่ได้กล่าวถึงสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของความเร็วเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็ง คือถ้าวัตถุแข็งเกร็งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\bar{\omega}$ รอบแกนๆหนึ่ง อาจมองได้ว่าวัตถุนี้หมุนรอบแกนนับไม่ถ้วนแกนที่ติดไปกับวัตถุและขนานกับแกนเดิม ด้วยความเร็วเชิงมุม $\bar{\omega}$ อันเดียวกัน

เพื่อให้เข้าใจง่ายจะดูวัตถุรูปร่างแบนที่เคลื่อนที่ในระนาบ ดังรูป 1.2.3 แนวAB เป็นแนวตรึงซึ่งอยู่นอกวัตถุ เราจะใช้แนวนี้เป็นแนวอ้างอิง จุด C,Dและ E เป็นจุดที่ติดอยู่บนวัตถุ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไปถ้ามุมระหว่างเส้น CD (หรือ CE หรือ DE) ซึ่งทำกับ AB เปลี่ยนไปก็แสดงว่าวัตถุนี้มีการหมุน ถ้ามุมไม่เปลี่ยนก็ไม่หมุน ในรูป 1.2.3 นี้มุม $D\hat{O}B = D\hat{O}'B$ แสดงว่าวัตถุนี้เคลื่อนที่โดยไม่มีการหมุน



รูป 1.2.3 เริ่มต้นวัตถุอยู่ซ้ายมือ เคลื่อนที่เฉียงๆไปทางขวาโดยไม่หมุน

ต่อไปสมมุติวัตถุเคลื่อนที่ดังรูป 1.2.4 โดย CD กวาดแบบทวนเข็มนาฬิกาทำให้มุมระหว่างเส้น CD กับ AB <u>เพิ่มขึ้น</u> θ (คือ $D\hat{O}'B - D\hat{O}B = \theta$) พิจารณาดูจะเห็นว่ามุมที่เส้น CE ทำกับเส้น AB เพิ่มขึ้น θ เช่นกัน นอกจากนี้ถ้ามีจุดอื่นๆอีกบนวัตถุ เช่นจุด F,G,… จะเห็นว่ามุมที่เส้น CF,CG,… ทำกับเส้น AB ก็จะเพิ่มขึ้น θ เช่นกัน นั่นคือวัตถุหมุนรอบจุด C ไปเป็นมุม θ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา



รูปที่ 1.2.4 วัตถุหมุนทวนเข็มนาฬิกา

ขณะเดียวกันจะเห็นว่ามุมที่เส้น DC,DE,DF,DG,…ทำกับเส้น AB (หรือแนวตรงอื่นๆนอกวัตถุ) เพิ่มขึ้น θ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาเช่นกัน หรือก็คือวัตถุหมุนรอบจุด D ไปเป็นมุม θ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา และในทำนองเดียวกันก็มองได้ว่าวัตถุหมุนรอบจุด E,F,G,... ไปเป็นมุม θ ในทิศทวนเข็มนาฬิกาเช่นกัน

ในตัวอย่างที่กล่าวมาเราดูวัตถุรูปร่างแบนซึ่งเป็นกรณีเฉพาะ ในกรณีทั่วไปนั้นวัตถุจะมีความหนา ซึ่ง<u>การหมุนเป็นการหมุนรอบแกน</u>(ไม่ใช่รอบจุด) จากที่กล่าวมาจะเห็นว่าเมื่อวัตถุหมุนเรามองได้ว่ามันหมุนรอบแกนนับไม่ถ้วนแกนเป็นมุมขนาดเท่ากันโดยแกนเหล่านี้ติดไปกับวัตถุ

ถ้าเราดูในช่วงเวลาสั้นๆ dt วินาที ให้มุมที่วัตถุหมุนรอบแกนเพิ่มขึ้น $d\theta$ เรเดียน ขนาดของความเร็วเชิงมุม ω จึงหาได้จาก $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ ส่วนทิศของความเร็วเชิงมุมเรากำหนดให้เป็นไปตามกฎมือขวาดังได้กล่าวมาแล้ว ในรูป 1.2.4 ทิศของความเร็วเชิงมุมจะพุ่งออกและตั้งฉากกับกระดาษ

นั่นคือ<u>ถ้าวัตถุแข็งเกร็งหมุนในระนาบด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ รอบแกนๆหนึ่ง อาจมองได้ว่าวัตถุนี้หมุนรอบแกนนับไม่ถ้วนแกนที่ติดไปกับวัตถุและขนานกับแกนเดิม ด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ เดียวกัน</u> คือเท่ากันทั้งขนาดและทิศทาง

ทำนองเดียวกัน<u>ถ้าวัตถุแข็งเกร็งหมุนในระนาบด้วยความเร่งเชิงมุม α รอบแกนๆหนึ่ง อาจมองได้ว่าวัตถุนี้หมุนรอบแกนนับไม่ถ้วนแกนที่ติดไปกับวัตถุและขนานกับแกนเดิม ด้วยความเร่งเชิงมุม α เดียวกัน</u>

1.3 โมเมนตัมเชิงมุม โมเมนต์ความเฉื่อย และ Product of Inertia

(Angular Momentum , Moment of Inertia and Product of Inertia)

1.3.1โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคตัวเดียว

โมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L}$ ของอนุภาคตัวเดียว นิยามคือ

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \qquad (1.3.1)$$

เมื่อ $\vec{P} = m\vec{v}$ คือโมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคนี้

จะเห็นว่าโมเมนตัมเชิงมุมเป็นปริมาณที่อ้างอิงเทียบกับจุดเช่นเดียวกับทอร์ก ถ้าจุดอ้างอิงเปลี่ยน โมเมนตัมเชิงมุมก็จะเปลี่ยนตาม

1.3.2โมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาค

คล้ายๆกับกรณีของทอร์ก เรานิยามโมเมนตัมเชิงมุมของระบบ $\vec{L}$ ว่าเป็นผลรวม(แบบเวกเตอร์) ของโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคแต่ละตัว คือ

$$\vec{L} = \sum_{\upsilon=1}^{N} \vec{r}_{\upsilon} \times \vec{P}_{\upsilon} \qquad (1.3.2)$$

1.3.3โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็ง

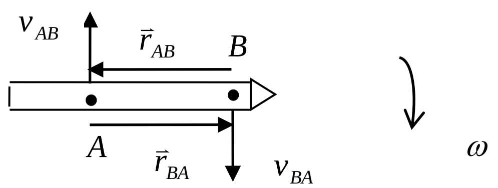
ระบบอนุภาคนั้นระยะห่างระหว่างสมาชิกแต่ละตัวอาจเปลี่ยนไปได้เรื่อยๆ แต่สำหรับวัตถุแข็งเกร็ง ระยะห่างระหว่างจุด 2 จุดใดๆบนวัตถุแข็งเกร็งเท่าเดิมเสมอ ดังนั้นการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันจึงเป็นไปได้เฉพาะการเคลื่อนที่แบบหมุน เราจะใช้ความจริงนี้ให้เป็นประโยชน์

1.3.3.1 ความเร็วของจุดใดๆบนวัตถุแข็งเกร็งเมื่ออ้างอิงกับจุดๆหนึ่งบนวัตถุแข็งเกร็ง เมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ คือ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

เพื่อความเข้าใจเราจะเริ่มจากวัตถุที่ไม่มีความหนา โดย เอาเข็มวินาทีที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 1.2.2 เป็นตัวอย่าง โคนเข็มนาฬิกา(เป็นจุดตรึง)อยู่กลางหน้าปัดนาฬิกา ให้ A และ B เป็นจุดบนเข็มวินาที โดย A อยู่ห่างจากโคนเข็ม 1 เซนติเมตร ส่วน B อยู่ห่างจากโคนเข็ม 2.5 เซนติเมตร ลองพิจารณาดูจะเห็นว่า ความเร็วของ A อ้างอิงกับจุดตรึงคือ $\frac{2\pi}{60}(1)$ เซนติเมตรต่อวินาที ทิศตั้งฉากกับเข็ม(ตามเข็มนาฬิกา) ส่วนความเร็วของ B อ้างอิงกับจุดตรึงคือ $\frac{2\pi}{60}(2.5)$ เซนติเมตรต่อวินาที ทิศตั้งฉากกับเข็ม(ตามเข็มนาฬิกา) เนื่องจากความเร็วเชิงมุมของเข็มนาฬิกาคือ $\frac{2\pi}{60}$ เรเดียนต่อวินาที ทิศพุ่งเข้าไปในหน้าปัดนาฬิกา ลองพิจารณาดูจะพบว่าถ้าเราให้จุดตรึงบนโคนเข็มเป็นจุดกำเนิดของเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}$ ความเร็วของจุดใดๆบนเข็มอ้างอิงกับจุดตรึงบนโคนเข็มหาได้จาก $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

ที่กล่าวมานั้นจุดกำเนิดของเวกเตอร์ตำแหน่งเป็นจุดตรึง แต่แม้ไม่ใช่จุดตรึงความสัมพันธ์ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ก็ยังคงเป็นจริง ตัวอย่างเช่นถ้าจะหาความเร็วของ B อ้างอิงกับ A เราเขียนเวกเตอร์ตำแหน่งชี้จาก A ไปยัง B คือ $\vec{r}_{BA}$ เมื่อ cross ด้วยความเร็วเชิงมุมจะได้ว่า ความเร็วของ B อ้างอิงกับ A คือ

$v_{BA} = \dfrac{2\pi}{60}(1.5)$ เซนติเมตรต่อวินาที ทิศตั้งฉากกับเข็ม(ตามเข็ม) ถ้าจะหาความเร็วของ A อ้างอิงกับ B เราก็เขียนเวกเตอร์ตำแหน่งชี้จาก B ไปยัง A คือ $\vec{r}_{AB}$ เมื่อ cross ด้วยความเร็วเชิงมุมก็จะได้ว่าความเร็วของ A อ้างอิงกับ B คือ $v_{AB} = \dfrac{2\pi}{60}(1.5)$ เซนติเมตรต่อวินาที ทิศตั้งฉากกับเข็ม(ทวนเข็ม) ดังรูป 1.3.1



รูป 1.3.1 โคนเข็มอยู่ตำแหน่งซ้ายสุดของเข็ม ทิศของความเร็วเชิงมุมพุ่งเข้าไปในกระดาษ

คราวนี้ลองดูกรณีที่วัตถุมีความหนา นักศึกษาลองพิจารณาดูจะเห็นว่าความสัมพันธ์ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ก็ยังคงเป็นจริงเช่นกัน ซึ่งก็คือเมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ ความเร็วของจุดใดๆบนวัตถุอ้างอิงกับจุดกำเนิดซึ่งติดไปกับวัตถุ หาได้จาก $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ เมื่อ $\vec{r}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดใดๆนั้น

1.3.3.2 โมเมนตัมเชิงมุม ในพจน์ของโมเมนต์ความเฉื่อย products of inertia และความเร็วเชิงมุม กรณีทั่วไป(องค์ประกอบของความเร็วเชิงมุมมีทั้งองค์ประกอบในแนวแกน x, y และ z)

เป็นการสะดวกที่จะเริ่มจากการพิจารณาระบบอนุภาคโดยกำหนดให้ระยะห่างระหว่างอนุภาคคงที่ เมื่อจะพิจารณาเป็นวัตถุแข็งเกร็งก็เพียงแต่เปลี่ยนการรวมจาก summation เป็นการอินทิเกรต

สมมติมีระบบอนุภาคที่ระยะห่างระหว่างอนุภาคคงที่ และสมมติให้ระบบนี้กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ ความเร็วของอนุภาคใดๆสัมพัทธ์กับจุดกำเนิดที่ติดไปกับระบบ(จุดกำเนิดอยู่ตรงไหนก็ได้)หาได้จาก $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 1.3.3.1

ดังนั้น โมเมนตัมเชิงมุมของระบบ อ้างอิงกับจุดกำเนิดที่ติดไปกับระบบ

$$\vec{L} = \sum_{\upsilon} \vec{r}_{\upsilon} \times \vec{P}_{\upsilon} = \sum_{\upsilon} \vec{r}_{\upsilon} \times m_{\upsilon}\vec{v}_{\upsilon} = \sum_{\upsilon} m_{\upsilon}\, \vec{r}_{\upsilon} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\upsilon}) \qquad (1.3.3)$$

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$ ใดๆ จะมีเอกลักษณ์ว่า $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

(นักศึกษาสามารถตรวจสอบได้โดยเขียน $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$ ให้อยู่ในพิกัดฉาก ตัวอย่างเช่น $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ จากนั้น cross และ dot ตรงจะเห็นว่า $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ เท่ากับ $\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$)

พิจารณา $\vec{r}_\upsilon \times(\vec{\omega}\times\vec{r}_\upsilon) = \vec{\omega}(\vec{r}_\upsilon\cdot\vec{r}_\upsilon) - \vec{r}_\upsilon(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_\upsilon)$ ซึ่งเมื่อเขียน $\vec{\omega}$ และ $\vec{r}_\upsilon$ ในพิกัดฉาก จะได้

$$= (\omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k})(x_\upsilon^2 + y_\upsilon^2 + z_\upsilon^2) - (x_\upsilon\hat{i} + y_\upsilon\hat{j} + z_\upsilon\hat{k})(\omega_x x_\upsilon + \omega_y y_\upsilon + \omega_z z_\upsilon)$$

จัดพจน์ได้ $= \{\omega_x(y_\upsilon^2 + z_\upsilon^2) - \omega_y x_\upsilon y_\upsilon - \omega_z x_\upsilon z_\upsilon\}\hat{i} + \{\omega_y(x_\upsilon^2 + z_\upsilon^2) - \omega_x x_\upsilon y_\upsilon - \omega_z y_\upsilon z_\upsilon\}\hat{j}$

$$+ \{\omega_z(x_\upsilon^2 + y_\upsilon^2) - \omega_x x_\upsilon z_\upsilon - \omega_y y_\upsilon z_\upsilon\}\hat{k}$$

ถ้าคูณด้วย m_υ จะได้โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคตัวที่ υ อ้างอิงกับจุดกำเนิด จากนั้นรวมโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคทุกตัวก็จะได้โมเมนตัมเชิงมุมของระบบนี้ตามสมการ 1.3.3 ซึ่งถ้าเราดูแต่ละองค์ประกอบ x, y และ z ของโมเมนตัมเชิงมุม จะได้ว่า องค์ประกอบในแนวแกน x ของโมเมนตัมเชิงมุม

$$L_x = \{\sum_\upsilon m_\upsilon(y_\upsilon^2 + z_\upsilon^2)\}\omega_x + \{-\sum_\upsilon m_\upsilon x_\upsilon y_\upsilon\}\omega_y + \{-\sum_\upsilon m_\upsilon x_\upsilon z_\upsilon\}\omega_z \qquad (1.3.4a)$$

และ $$L_y = \{-\sum_\upsilon m_\upsilon x_\upsilon y_\upsilon\}\omega_x + \{\sum_\upsilon m_\upsilon(x_\upsilon^2 + z_\upsilon^2)\}\omega_y + \{-\sum_\upsilon m_\upsilon y_\upsilon z_\upsilon\}\omega_z \qquad (1.3.4b)$$

และ $$L_z = \{-\sum_\upsilon m_\upsilon x_\upsilon z_\upsilon\}\omega_x + \{-\sum_\upsilon m_\upsilon y_\upsilon z_\upsilon\}\omega_y + \{\sum_\upsilon m_\upsilon(x_\upsilon^2 + y_\upsilon^2)\}\omega_z \qquad (1.3.4c)$$

ขณะนี้เราได้โมเมนเมนตัมเชิงมุม<u>ของระบบอนุภาค</u>ดังในสมการ 1.3.4a-1.3.4c แล้ว เป็นโมเมนตัมเชิงมุมอ้างอิงกับจุดกำเนิดซึ่งติดไปกับระบบ (ระลึกว่าโมเมนตัมเชิงมุมเป็นปริมาณที่อ้างอิงกับจุด) <u>ในกรณีของวัตถุแข็งเกร็งที่เนื้อวัตถุเรียงชิดติดกัน</u>เราเพียงแต่เปลี่ยนเป็นการรวมด้วยการอินทิเกรต ก็จะได้ว่า

$$L_x = \{\int(y^2 + z^2)dm\}\omega_x + \{-\int xydm\}\omega_y + \{-\int xzdm\}\omega_z \qquad (1.3.5a)$$

เราจะเขียนสั้นๆเป็น $$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \qquad (1.3.6a)$$

$$L_y = \{-\int xydm\}\omega_x + \{\int(x^2 + z^2)dm\}\omega_y + \{-\int yzdm\}\omega_z \qquad (1.3.5b)$$

เราจะเขียนสั้นๆเป็น $$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \qquad (1.3.6b)$$

และ $L_z = \{-\int xzdm\}\omega_x + \{-\int yzdm\}\omega_y + \{\int (x^2+y^2)dm\}\omega_z$ (1.3.5c)

เราจะเขียนสั้นๆเป็น $L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$ (1.3.6c)

จากสมการ1.3.6 a,b,c จะเห็นว่าทิศของโมเมนตัมเชิงมุมและทิศของความเร็วเชิงมุมปกติแล้วไม่ชี้ทิศเดียวกัน เพราะถ้าชี้ทิศเดียวกันความสัมพันธ์ควรอยู่ในรูป $\bar{L} = c\bar{\omega}$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ ซึ่งก็คือควรเป็นว่า $L_x = c\omega_x, L_y = c\omega_y, L_z = c\omega_z$ แต่สมการ1.3.6 a,b,c ไม่เป็นเช่นนี้

เพื่อความง่ายนักศึกษาควรจำสมการ 1.3.5 a,b,c **ในรูปของเมตริกซ์ดังนี้**

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (1.3.7)^{**}$$

เมตริกซ์แรกทางขวามือของสมการ 1.3.7 ซึ่งเป็นเมตริกซ์ขนาด 3×3 คือ inertia tensor ซึ่งเขียนในรูปของเมตริกซ์ โดย $I_{xx} = \int (y^2+z^2)dm$, $I_{yy} = \int (x^2+z^2)dm, I_{zz} = \int (x^2+y^2)dm$ พจน์ทั้งสามนี้เรียกว่าโมเมนต์ความเฉื่อย(moments of inertia) พึงสังเกตว่า $(y^2+z^2), (x^2+z^2)$ และ (x^2+y^2) คือระยะทางตั้งฉากจากมวล dm ไปยังแกน x, y และ z ตามลำดับยกกำลังสอง ดังนั้น I_{xx}, I_{yy} และ I_{zz} จึงเป็นโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน x, y และ z ตามลำดับ ส่วนอีกหกพจน์ คือ $I_{xy} = I_{yx} = -\int x\,y\,dm$, $I_{xz} = I_{zx} = -\int xzdm$, และ $I_{yz} = I_{zy} = -\int yzdm$ เรียกว่า products of inertia

สมการ 1.3.7 เป็นการบรรยายความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนตัมเชิงมุม(อ้างอิงกับจุดกำเนิด)กับความเร็วเชิงมุม สำหรับ แกน xyz ใดๆที่ติดไปกับวัตถุ โดยจุดกำเนิดอยู่ที่ใดก็ได้ไม่จำเป็นต้องเป็นจุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสามของสมการ $\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$ และเนื่องจากเป็นแกนที่ติดไปกับวัตถุ ดังนั้นเมื่อวัตถุหมุนค่าของ โมเมนต์ความเฉื่อยและ products of inertia จึงไม่ขึ้นกับเวลา

(รายละเอียดของคณิตศาสตร์ นักศึกษาดูให้เข้าใจสักครั้งก็พอ จากนั้นก็จำสมการ 1.3.7 พร้อมนิยามของ moments of inertia และ products of inertia)

1.3.3.3 โมเมนตัมเชิงมุม ในพจน์ของโมเมนต์ความเฉื่อย products of inertia และความเร็วเชิงมุม

กรณีการหมุนในระนาบ

ในกรณีการหมุนในระนาบทิศของความเร็วเชิงมุมอยู่ในแนวเดิมตลอด ถ้าวัตถุหมุนในระนาบด้วยความเร็วเชิงมุม $\bar{\omega}$ เราจะให้แกน z อยู่ในแนวของความเร็วเชิงมุม ดังนั้น $\omega_x = \omega_y = 0 , \omega_z = \omega$ สมการ 1.3.7 จะเป็น

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \qquad (1.3.8)^{**}$$

ระลึกว่า xyz เป็นแกนใดๆที่ติดไปกับวัตถุ ดังนั้นค่าของ moments of inertia และ products of inertia จึงไม่ขึ้นกับเวลา ในสมการ 1.3.8 นี้จุดกำเนิดติดอยู่ที่ใดของวัตถุก็ได้ เช่นเดียวกับสมการ 1.3.7

สมการ 1.3.8 อาจเขียนเป็นว่า

$$\vec{L} = I_{xz}\omega\hat{i} + I_{yz}\omega\ \hat{j} + I_{zz}\omega\hat{k} \qquad (1.3.9)^{**}$$

(นักศึกษาจำแต่สมการ 1.3.7 สมการ 1.3.8 และ 1.3.9 มันจะออกมาเอง)

จะเห็นว่า products of inertia และโมเมนต์ความเฉื่อยที่มีผลต่อโมเมนตัมเชิงมุมมีเพียง I_{xz}, I_{yz} และ I_{zz} เท่านั้น จากสมการ 1.3.9 จะเห็นว่า แม้เป็นการหมุนในระนาบแต่ทิศของโมเมนตัมเชิงมุมและทิศของความเร็วเชิงมุม ปกติแล้วก็ไม่ได้อยู่ในทิศเดียวกัน

พึงสังเกตว่าโมเมนต์ความเฉื่อย I ในหนังสือระดับมัธยมหรือฟิสิกส์ทั่วไป 1 นั้นก็คือ I_{zz} ในสมการ 1.3.9 นั่นเอง ดังนั้นการเขียนว่า $\vec{L} = I\bar{\omega}$ จึงไม่เป็นความจริงเสมอไปแม้ว่าเป็นการหมุนในระนาบ จะเป็นจริงเมื่อ I_{xz} และ I_{yz} เป็นศูนย์เท่านั้น การกล่าวว่าโมเมนตัมเชิงมุมเท่ากับ $I\omega$ นั้นถ้าจะให้รัดกุมควรกล่าวว่า "องค์ประกอบของโมเมนตัมเชิงมุมในแนวของความเร็วเชิงมุมเท่ากับ $I\omega$" ซึ่งเป็นจริงเสมอสำหรับการหมุนในระนาบ ดังเห็นได้ในสมการ 1.3.9 นอกจากนี้เมื่อนักศึกษาเห็นพจน์ $I\omega$ ควรระลึกทันทีว่าจุดอ้างอิงที่ใช้คำนวณโมเมนตัมเชิงมุมเป็นจุดที่ติดไปกับวัตถุ

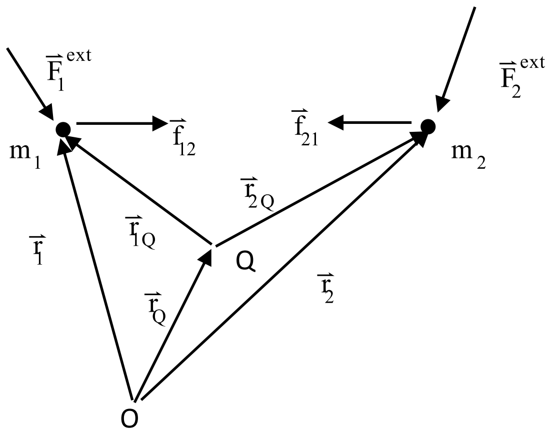
2.สมการการเคลื่อนที่สำหรับการเคลื่อนที่แบบหมุน

(กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองสำหรับการหมุน)

2.1 สมการการเคลื่อนที่สำหรับการเคลื่อนที่แบบหมุนในกรณีทั่วไป $(\bar{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt})$

คำว่ากรณีทั่วไปในหัวข้อนี้คือใช้ได้ทั้งระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง และอนุภาคแต่ละตัวจะเคลื่อนที่ในระนาบหรือไม่ก็ได้ ส่วนการจะตีความว่าหมุนหรือไม่หมุนนั้นแล้วแต่จะมองจากมุมใด ถ้าดูในสมการ 1.3.1 อนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นเส้นตรงก็มีโมเมนตัมเชิงมุม โดยโมเมนตัมเชิงมุมเป็นปริมาณที่เราใช้บรรยายการเคลื่อนที่แบบหมุน ชื่อของหัวข้อนี้มองจากมุมดังกล่าว

สมมติมีระบบอนุภาคซึ่งประกอบด้วยอนุภาคจำนวน N ตัว แต่เพื่อความชัดเจนในรูป 2.1.1 จะเขียนเฉพาะอนุภาค 2 ตัวเท่านั้น มวลของแต่ละตัวคือ m_1 และ m_2



รูป 2.1.1

ให้ O เป็นจุดอ้างอิงที่ไม่มีความเร่ง(เรามักให้เป็นจุดตรึง คืออยู่นิ่ง)

Q เป็นจุดใดๆที่อาจมีความเร่งก็ได้

$\vec{F}_1^{ext}$, $\vec{F}_2^{ext}$,…, $\vec{F}_N^{ext}$ เป็นแรงภายนอกระบบที่กระทำต่ออนุภาคตัวที่ 1, ตัวที่ 2 ,…, ตัวที่ N ซึ่งมีมวล m_1, m_2,..., m_N ตามลำดับ

$\vec{f}_{12}$, $\vec{f}_{13}$,…, $\vec{f}_{1N}$ เป็นแรงภายในระบบที่อนุภาคตัวที่ 2 ,ตัวที่ 3 ,…, ตัวที่ N ตามลำดับ กระทำต่ออนุภาคตัวที่ 1

$\vec{f}_{21}, \vec{f}_{23}$,…, $\vec{f}_{2N}$ เป็นแรงภายในระบบที่อนุภาคตัวที่ 1,ตัวที่ 3 ,…,ตัวที่ N ตามลำดับ กระทำต่ออนุภาคตัวที่ 2

...

$\vec{f}_{N1}, \vec{f}_{N2}, \ldots, \vec{f}_{N\,N-1}$ เป็นแรงภายในระบบที่อนุภาคตัวที่ 1 ,ตัวที่ 2 ,…,ตัวที่ $N-1$ ตามลำดับ กระทำต่ออนุภาคตัวที่ N

$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$,…, $\vec{r}_N$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ 1 ,ตัวที่ 2 ,…, ตัวที่ N ตามลำดับ <u>อ้างอิงกับจุด O</u>

$\vec{r}_{1Q}$, $\vec{r}_{2Q}$,…, $\vec{r}_{NQ}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ 1 ,ตัวที่ 2 ,…, ตัวที่ N ตามลำดับ <u>อ้างอิงกับจุด Q</u>

จากรูป 2.1.1 จะเห็นว่า $\vec{r}_{1Q} = \vec{r}_1 - \vec{r}_Q$ เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้ $\dot{\vec{r}}_{1Q} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_Q$

ทำนองเดียวกันสำหรับอนุภาคตัวที่2,ตัวที่ 3 จนถึงตัวที่ N ก็จะได้คล้ายๆกัน โดยของตัวที่ N จะได้

$$\vec{r}_{NQ} = \vec{r}_N - \vec{r}_Q \ , \ \dot{\vec{r}}_{NQ} = \dot{\vec{r}}_N - \dot{\vec{r}}_Q$$

เราลองมาดูความหมายกันสักนิด ต่อไปนักศึกษาจะได้ดูความหมายของพจน์อื่นๆได้ จะยกตัวอย่างโดยดูอนุภาคตัวที่ 1

$\dot{\vec{r}}_{1Q}$ คือความเร็วของอนุภาคตัวที่ 1 อ้างอิงกับจุด Q

$\dot{\vec{r}}_1$ คือความเร็วของอนุภาคตัวที่ 1 อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย

$\dot{\vec{r}}_Q$ คือความเร็วของจุด Q อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย

ต่อไปเราจะหาโมเมนตัมเชิงมุม จากสมการ 1.3.1 โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคตัวที่ 1 อ้างอิงกับจุด Q คือ

$$\vec{L}_{1Q} = \vec{r}_{1Q} \times m_1\dot{\vec{r}}_{1Q} = m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_Q)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$\dot{\vec{L}}_{1Q} = m_1(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_Q)\times(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_Q) + m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_Q)$$

พจน์แรกทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับเป็นศูนย์เพราะ $(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_Q)$ cross กับตัวมันเอง ดังนั้น

$$\dot{\vec{L}}_{1Q} = m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_Q) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times m_1\ddot{\vec{r}}_1 - m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q \qquad (2.1.1)$$

เนื่องจาก $\ddot{\vec{r}}_1$ เป็นความเร่งของอนุภาคตัวที่ 1 อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองแบบเลื่อนที่ $m_1\ddot{\vec{r}}_1$ จึงเท่ากับแรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคตัวที่ 1 คือ

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1N}$$ แทนลงใน(2.1.1) จะได้

$$\dot{\vec{L}}_{1Q} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times(\vec{F}_1^{ext} + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1N}) - m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q \qquad (2.1.2)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหา $\dot{\vec{L}}_{2Q}, \dot{\vec{L}}_{3Q}, \ldots, \dot{\vec{L}}_{NQ}$ ได้

เนื่องจากโมเมนตัมเชิงมุมของระบบอ้างอิงกับจุด Q คือ $\vec{L}_Q = \vec{L}_{1Q} + \vec{L}_{2Q} + \ldots + \vec{L}_{NQ}$ เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้ $\dot{\vec{L}}_Q = \dot{\vec{L}}_{1Q} + \dot{\vec{L}}_{2Q} + \ldots + \dot{\vec{L}}_{NQ}$ จากสมการ 2.1.2 จะได้

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}_Q = \dot{\vec{L}}_{1Q} + \dot{\vec{L}}_{2Q} + \ldots + \dot{\vec{L}}_{NQ} &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times(\vec{F}_1^{ext} + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1N}) - m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q \\ &+ (\vec{r}_2 - \vec{r}_Q)\times(\vec{F}_2^{ext} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2N}) - m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q \\ &+ \ldots + (\vec{r}_N - \vec{r}_Q)\times(\vec{F}_N^{ext} + \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + \ldots + \vec{f}_{NN-1}) - m_N(\vec{r}_N - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q \qquad (2.1.3)\end{aligned}$$

ลองกระจายพจน์ $(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times(\vec{F}_1^{ext} + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1N}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times\vec{F}_1^{ext} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times\vec{f}_{12} + \ldots$

และอีกสักพจน์ $(\vec{r}_2 - \vec{r}_Q)\times(\vec{F}_2^{ext} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2N}) = (\vec{r}_2 - \vec{r}_Q)\times\vec{F}_2^{ext} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_Q)\times\vec{f}_{21} + \ldots$

แล้วดูสิ่งที่เรากระจายออกมา จากรูป2.1.1 จะเห็นว่า $(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times\vec{f}_{12}$ คือทอร์กของแรงภายใน $\vec{f}_{12}$ อ้างอิงกับจุด Q ส่วน $(\vec{r}_2 - \vec{r}_Q)\times\vec{f}_{21}$ คือทอร์กของแรงภายใน $\vec{f}_{21}$ อ้างอิงกับจุด Q

แต่จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สาม $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ ถ้าดูในรูป 2.1.1 แรงทั้งสองอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้นทอร์กของแรงทั้งสองจึงหักล้างกันเป็นศูนย์

ถ้าดูทอร์กของแรงภายในแรงอื่นก็ จะมีทอร์กมาหักล้างกันเป็นคู่ๆเช่นเดียวกัน ดังนั้น<u>ทอร์กของแรงภายในระบบจึงเป็นศูนย์</u> เหลือแต่ทอร์กของแรงภายนอกระบบ

สมการ 2.1.3 จึงเป็น

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}_Q &= \{(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times\vec{F}_1^{ext} + + (\vec{r}_2 - \vec{r}_Q)\times\vec{F}_2^{ext} + \ldots + (\vec{r}_N - \vec{r}_Q)\times\vec{F}_N^{ext}\} \\ &- \{m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q + \ldots + m_N(\vec{r}_N - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q\} \qquad (2.1.4)\end{aligned}$$

จากสมการ 1.1.2 เรานิยาม ทอร์ก(ของแรงภายนอกระบบ) ที่กระทำต่อระบบอนุภาคว่าเป็นผลรวมของทอร์กที่กระทำต่ออนุภาคแต่ละตัว ดังนั้นวงเล็บปีกกาอันแรกในสมการ 2.1.4 คือทอร์ก $\vec{\tau}_Q$ ที่ทำต่อระบบ อ้างอิงเทียบกับจุด Q สมการ 2.1.4 จึงเขียนได้เป็น

$$\dot{\vec{L}}_Q = \vec{\tau}_Q - \{m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q + \ldots + m_N(\vec{r}_N - \vec{r}_Q)\times\ddot{\vec{r}}_Q\}$$

กระจายพจน์ในวงเล็บปีกกา แล้วจัดพจน์ จะได้

$$\dot{\vec{L}}_Q = \vec{\tau}_Q - \{(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_N\vec{r}_N) \times \ddot{\vec{r}}_Q - (m_1 + m_2 + ... + m_N)\vec{r}_Q \times \ddot{\vec{r}}_Q\} \qquad (2.1.5)$$

จากนิยามของเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}_{CM}$ ศูนย์กลางมวล

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N}$$

ถ้าให้ $M = m_1 + m_2 + ... + m_N$ เป็นมวลทั้งหมดของระบบอนุภาคนี้ ดังนั้น

$$\dot{\vec{L}}_Q = \vec{\tau}_Q - \{M\,\vec{r}_{CM} \times \ddot{\vec{r}}_Q - M\,\vec{r}_Q \times \ddot{\vec{r}}_Q\} = \vec{\tau}_Q - M\,(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_Q = \vec{\tau}_Q - M\,(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q \qquad (2.1.6)$$

เพื่อให้จำได้ง่าย เราจะเขียนสมการ 2.1.6 ใหม่เป็น (วิธีจำดูหมายเหตุข้อ2)

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_Q = \vec{\tau}_Q + (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q) \times (-M\,\ddot{\vec{r}}_Q) \qquad (2.1.6a)^{**}$$

สมการ 2.1.6 มีพจน์ $M\,(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q$ ซึ่งดูพะรุงพะรัง ในทางปฏิบัติเราจะเลือกจุด Q ที่ทำให้พจน์นี้เป็นศูนย์ ซึ่งจุด Q ต้องเป็นดังนี้

1.ไม่มีความเร่ง (เพราะ $\ddot{\vec{r}}_Q = 0$)

2.มีความเร่งก็ได้ถ้าเป็นจุดศูนย์กลางมวล (เพราะ $\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q = \vec{r}_{CM} - \vec{r}_{CM} = 0$)

3.ไม่ใช่ศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้ามีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกผ่านศูนย์กลางมวล

(เพราะ $\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q$ ชี้จากจุด Q ไปศูนย์กลางมวล ดังนั้นถ้า cross กับ $\ddot{\vec{r}}_Q$ ที่มีทิศพุ่งเข้าหรือออกผ่านศูนย์กลางมวล จะได้ศูนย์)

สมการ 2.1.6 นิยมเขียนสั้นๆ ดังที่พบเห็นในหนังสือทั่วไป ดังนี้

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (2.1.7)^{**}$$

คือทอร์กเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม <u>เมื่อเห็นสมการนี้นักศึกษาควรระลึกถึงเงื่อนไข 3 ข้อ คือจุดอ้างอิงที่ใช้คำนวณทอร์กและโมเมนตัมเชิงมุมนั้นจะต้อง 1.ไม่มีความเร่ง หรือ 2.มีความเร่งก็ได้ถ้าเป็นจุดศูนย์กลางมวล หรือ 3.ไม่ใช่ศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้ามีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกผ่านศูนย์กลางมวล</u>

สมการ 2.1.7 เป็นสมการตั้งต้นที่เราจะนำไปต่อยอดเป็นสมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์และสมการ $\tau = I\,\alpha$ จะเห็นว่าเราทำคณิตศาสตร์ไปเรื่อยๆก็ได้สมการนี้ออกมา นักศึกษาไม่จำเป็นต้องจำรายละเอียดในการทำ ดูให้เข้าใจสักครั้งก็พอแล้ว สิ่งที่นักศึกษาต้องจำคือเมื่อเห็นสมการนี้แล้วต้องระลึกถึงเงื่อนไขทั้งสามข้อที่กล่าวมาแล้ว

(นักศึกษาควรจำสมการ 2.1.7 พร้อมเงื่อนไข 3 ข้อควบคู่กัน ส่วนวิธีจำสมการ 2.1.6a นั้นดูในข้อ 2 ของหมายเหตุ)

{ <u>**อ.ในภาค**</u> ในหัวข้อ 2.2 นี้ ผมนำมาจากหนังสือ Mechanics ของ Symmon แล้วจัดฟอร์มเป็นสมการ 2.1.6a เพื่อให้จำง่าย }

<u>หมายเหตุ</u> 1. เราใช้กฎการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่เพื่อหาสมการ 2.1.7 ตัวอย่างเช่นในบรรทัดเหนือสมการ 2.1.2 $m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1N}$

แต่กฎการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่จะเป็นจริงนั้นต้องอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย ดังนั้น<u>อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม</u> $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ <u>ในสมการ 2.1.7 ต้องอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย</u>

2. วิธีจำสมการ 2.1.6a ซึ่งเป็นกรณีจุดอ้างอิง Q มีความเร่งเป็น $\ddot{\vec{r}}_Q$ ซึ่งจะเป็นอย่างไรก็ได้ ทำได้โดยใส่แรงเทียม $(-M\,\ddot{\vec{r}}_Q)$ ที่จุดศูนย์กลางมวลของระบบ $(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q)\times(-M\,\ddot{\vec{r}}_Q)$ จะเป็นทอร์กของแรงเทียมนี้อ้างอิงกับจุด Q ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุม $\dfrac{d}{dt}\vec{L}_Q$ เท่ากับทอร์กจริง $\vec{\tau}_Q$ บวกทอร์กเทียม $(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q)\times(-M\,\ddot{\vec{r}}_Q)$

2.2 สมการการเคลื่อนที่สำหรับการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งซึ่งหมุนในระนาบ

สมการ 2.1.7 ใช้ได้กับทั้งระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง ความจริงแล้ววัตถุแข็งเกร็งก็คือระบบอนุภาคที่มีอนุภาคอยู่เรียงชิดติดกันและรูปร่างไม่เปลี่ยนแปลงนั่นเอง อย่างไรก็ตามสมการ 2.1.7 ไม่เหมาะนักที่จะใช้กับวัตถุแข็งเกร็ง เราจะหาสมการที่เหมาะกว่านี้ พึงสังเกตว่าในสมการ 2.1.7 นั้นไม่ได้กล่าวถึง

ความเร็วเชิงมุมเลย คือในการเคลื่อนที่นั้นอนุภาคแต่ละตัวจะเคลื่อนที่อย่างไรก็ได้ ระยะห่างระหว่างอนุภาคไม่จำเป็นต้องคงที่

2.2.1 สมการการเคลื่อนที่สำหรับวัตถุแข็งเกร็งรูปทรงใดๆซึ่งไม่จำเป็นต้องมีสมมาตร

สมการ 1.3.8 บอกถึงโมเมนตัมเชิงมุม $\bar{L}$ อ้างอิงกับจุดกำเนิดของพิกัดฉากซึ่งติดไปกับวัตถุ ถ้าเราเลือกจุดกำเนิด(จุดอ้างอิง Q ในหัวข้อ 2.1) ที่ 1.ไม่มีความเร่ง หรือ2.มีความเร่งก็ได้ถ้าเป็นศูนย์กลางมวล หรือ3.ไม่ใช่ศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้ามีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกผ่านศูนย์กลางมวล เราก็สามารถใช้สมการ $\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$ ได้ พึงสังเกตว่าถ้าเราใช้แกนตรึงซึ่งไม่ติดไปกับวัตถุค่าโมเมนต์ความเฉื่อย และ products of inertia จะเปลี่ยนไปเมื่อวัตถุหมุนซึ่งทำให้เกิดความยุ่งยากในการคำนวณหา $\frac{d\bar{L}}{dt}$ เราจึงจะใช้แกน xyz ที่ติดไปกับวัตถุ

เนื่องจากแกน xyz ที่ติดไปกับวัตถุไม่ใช่กรอบอ้างอิงเฉื่อยเพราะวัตถุหมุน แต่ $\frac{d\bar{L}}{dt}$ ต้องอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อยดังได้กล่าวมาแล้วในหมายเหตุข้อ 1 ของหัวข้อ 2.1 เราจะแก้ปัญหานี้ด้วยการใช้สมการ (ก5) ในภาคผนวก ก. คือ ถ้าวัตถุหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\bar{\omega}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุมสังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง(กรอบอ้างอิงเฉื่อย) $\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fixed}$ หาได้จาก

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{rot} + \bar{\omega}\times\bar{L}$$

เมื่อ $\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{rot}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของ $\bar{A}$ เมื่อถือว่า $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ คงที่ (บางครั้งเรียกว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเมื่อสังเกตจากกรอบที่หมุน)

จากสมการ 1.3.8 สำหรับการหมุนในระนาบ $\bar{L} = I_{xz}\omega\hat{i} + I_{yz}\omega\,\hat{j} + I_{zz}\omega\hat{k}$ โดย $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega$ ดังนั้น ผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง จะสังเกตเห็นอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม เป็น

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{rot} + \omega\hat{k}\times(I_{xz}\omega\hat{i} + I_{yz}\omega\,\hat{j} + I_{zz}\omega\hat{k}) \qquad (2.2.1)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของ $\bar{L}$ เมื่อถือว่า $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ คงที่ นั้น $I_{xz}, I_{yz}, I_{zz}, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ จะคงที่ มีเฉพาะอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ω ซึ่งเท่ากับความเร่งเชิงมุม α ดังนั้น

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{rot} = I_{xz}\alpha\,\hat{i} + I_{yz}\alpha\,\hat{j} + I_{zz}\alpha\,\hat{k}$$ หลังจาก cross $\bar{\omega}\times\bar{L}$ แล้วจัดพจน์ จะได้

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fixed} = (I_{xz}\alpha - I_{yz}\omega^2)\,\hat{i} + (I_{yz}\alpha + I_{xz}\omega^2)\,\hat{j} + I_{zz}\alpha\,\hat{k} \qquad (2.2.2)$$

แต่ $\bar{\tau} = \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fixed}$ ดังนั้น เมื่อดูในแต่ละองค์ประกอบ $x,\ y$ และ z จะได้

$\tau_x = (I_{xz}\alpha - I_{yz}\omega^2)$, $\tau_y = (I_{yz}\alpha + I_{xz}\omega^2)$ และ $\tau_z = I_{zz}\alpha$ หรือเขียนเป็น

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= I_{xz}\alpha - I_{yz}\ \omega^2 \\ \tau_y &= I_{yz}\alpha + I_{xz}\ \omega^2 \\ \tau_z &= I_{zz}\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.3)^{**}$$

<u>สมการ 2.2.3 เป็นสมการทั่วไปสำหรับวัตถุรูปทรงใดๆซึ่งจะมีหรือไม่มีสมมาตรก็ได้ โดยวัตถุนี้หมุนในระนาบและมีความเร็วเชิงมุมอยู่ในแนวแกน z จุดกำเนิดของแกน xyz จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข 3 ข้อคือ</u> <u>1.ไม่มีความเร่ง หรือ 2.มีความเร่งก็ได้ถ้าเป็นจุดศูนย์กลางมวล หรือ 3.ไม่ใช่ศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้ามีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกผ่านศูนย์กลางมวล</u>

พึงสังเกตว่าเราหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุมก่อนแล้วค่อยดูทีละองค์ประกอบ ซึ่งแต่ละองค์ประกอบจะเท่ากับทอร์กในองค์ประกอบนั้น ตัวอย่างเช่น $\tau_z = \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)\cdot\hat{k}$ ไม่ใช่ $\tau_z = \frac{d}{dt}(\bar{L}\cdot\hat{k})$ เพราะโดยทั่วไปแล้ว $\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)\cdot\hat{k}$ อาจไม่เท่ากับ $\frac{d}{dt}(\bar{L}\cdot\hat{k})$ (ถ้านักศึกษามองไม่เห็นให้ดู $\bar{L}$ จากสมการ 1.3.7 ซึ่งเป็นกรณีทั่วไป) เพียงแต่ในกรณีการหมุนในระนาบพจน์ทั้งสองเท่ากัน

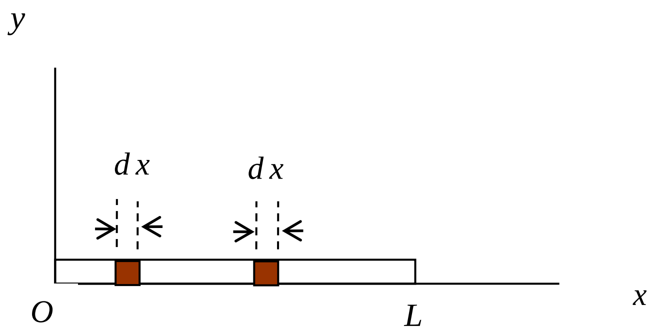
ตัวอย่างที่2.2.1-2.2.4 ต่อไปนี้แม้เมื่อต่อไปนักศึกษาไปเป็นครูจะไม่ได้ใช้สอนนักเรียน แต่จะช่วยให้นักศึกษามองเห็นภาพกว้างของการหมุนในระนาบ

ตัวอย่างที่2.2.1 คานสม่ำเสมอพื้นที่หน้าตัดน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาว คานมีมวล M กิโลกรัม ยาว L เมตร คานวางตัวอยู่ในแนวแกน x ของพิกัดฉาก xyz จงคำนวณ I_{xz}, I_{yz} และ I_{zz} ถ้าเลือกจุดกำเนิดที่ต่างกัน 2 จุด คือจุดที่ทำให้พิกัดของปลายคานด้านซ้ายเป็น ก) $(0,0,0)$ ข) $(0,0,c)$

<u>วิธีทำ</u> ในตัวอย่างนี้จะบรรยายการอินทิเกรตละเอียดหน่อย ต่อไปจะพูดเพียงสั้นๆ เพราะวิธีการจะคล้ายกัน

ความหนาแน่น(เชิงความยาว)ของคานคือ $\dfrac{M}{L}$ กิโลกรัมต่อเมตร

ก) ให้ปลายคานด้านซ้ายทับกับจุดกำเนิด ดังรูป ต.ย.2.2.1ก. พิกัดของปลายคานคือ $(0,0,0)$



รูป ต.ย.2.2.1ก. แกน z พุ่งออกจากหน้ากระดาษ

$$\because I_{xz} = -\int xz dm$$

เนื่องจากความหมายของ dx คือระยะทางสั้นๆบนแกน x ดังนั้นเมื่อมองดูคานจะเห็นว่าคานประกอบไปด้วยส่วนย่อยๆยาว dx เมตร เรียงต่อกันเต็มไปหมดตั้งแต่ $x=0$ ถึง $x=L$

ดูชิ้นเล็กๆชิ้นไหนก็ได้ มวล dm ของชิ้นนี้เท่ากับ $\dfrac{M}{L}dx$ กิโลกรัม อยู่บนระนาบ $y=0$ และ $z=0$ หรือก็คือมีพิกัด $(x,0,0)$ เมตร นั่นเอง โดยมวลเล็กๆนี้จะอยู่ที่ x ถึง $x+dx$ เมตร

ถ้าดู $-\int xz dm$ ซึ่งเขียนอีกอย่างได้เป็น $\int - xz dm$ ความหมายของมัน คือ ดูมวลเล็กๆของคานชิ้นหนึ่งคือ dm เอามวลชิ้นนี้(กิโลกรัม) คูณกับพิกัด x ของมัน(เมตร) คูณกับพิกัด z ของมัน(เมตร) แล้วใส่เครื่องหมายลบเข้าไป จะได้ product of inertia ย่อย เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น dI_{xz} จากนั้นก็

รวม dI_{xz} ของมวลเล็กๆชิ้นอื่นให้ทั่วทั้งคาน สัญลักษณ์ของการรวมมีเครื่องหมายคล้ายถั่วงอก เราเรียกว่าเครื่องหมายอินทิเกรต

เนื่องจากมวลชิ้นเล็กๆไม่ว่าจะอยู่ที่ใดของคานมีพิกัด $z = 0$ ดังนั้น $dI_{xz} = xzdm = 0$ เมื่อรวมให้ทั่วทั้งคานก็ยังเป็นศูนย์ คือ $I_{xz} = \quad -\int xzdm = 0$

ทำนองเดียวกัน $I_{yz} = 0$ เช่นกัน

คราวนี้ดู $$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)dm$$

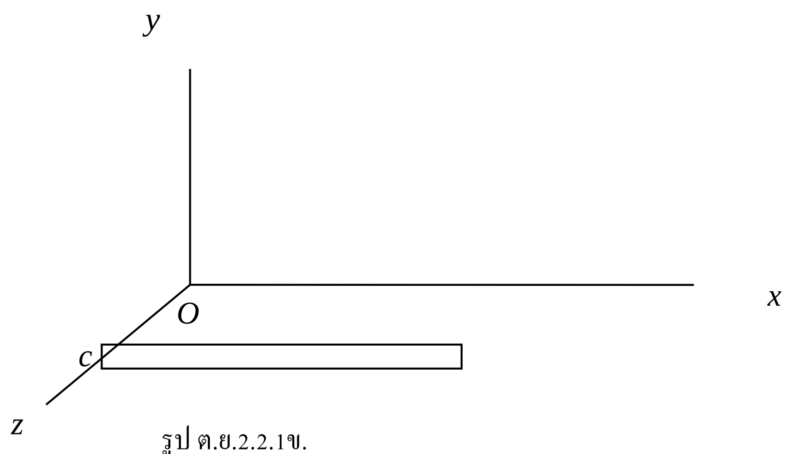
วิธีการจะเหมือนเดิมคือ ดูมวลชิ้นเล็กๆ dm ชิ้นไหนก็ได้ พิกัด y ของมวลนี้เป็นศูนย์ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลนี้ $dI_{zz} = (x^2 + 0)dm = x^2 \dfrac{M}{L} dx$

โมเมนต์ความเฉื่อย I_{zz} ของคานทั้งอัน ได้จากการรวมโมเมนต์ความเฉื่อยย่อย dI_{zz} ตั้งแต่ $x = 0$ ถึง $x = L$

คือ $$I_{zz} = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^L = \frac{1}{3} ML^2$$

นั่นคือสำหรับพิกัดชุดนี้ $I_{xz} = 0$, $I_{yz} = 0$, $I_{zz} = \dfrac{1}{3} ML^2$

ข) ให้ปลายด้านซ้ายของคานอยู่ที่พิกัด $(0,0,c)$ ดังรูป ต.ย.2.2.1ข.



รูป ต.ย.2.2.1ข.

ถ้าเราดูมวลเล็กๆที่ตำแหน่งใดๆของคาน พิกัด z ของมวลนี้เท่ากับ c

$$\therefore \quad I_{xz} = -\int xcdm = -c\int_0^L x\frac{M}{L}dx = -\frac{MLc}{2}$$

ทำนองเดียวกับข้อ ก. จะได้ $I_{yz} = 0$ และ $I_{zz} = \frac{1}{3}ML^2$

นั่นคือสำหรับพิกัดชุดนี้ $I_{xz} = -\frac{MLc}{2}$, $I_{yz} = 0$, $I_{zz} = \frac{1}{3}ML^2$

ตัวอย่างที่2.2.2 คานในตัวอย่าง 2.2.1 ปลายด้านซ้ายติดกับบานพับที่หมุนได้คล่องทำให้คานหมุนในระนาบดิ่ง ถ้าเลือกจุดอ้างอิง(ที่ใช้คำนวณทอร์ก และเป็นจุดกำเนิดของแกนที่ใช้คำนวณ I_{xz}, I_{yz} และ I_{zz}) ที่ต่างกันคือ ก) จุดกำเนิดในรูป ต.ย.2.2.1ก. ข) จุดกำเนิดในรูป ต.ย.2.2.1ข.

ในแต่ละกรณีจงเขียนสมการ 2.2.3 ในแต่ละองค์ประกอบ x , y และ z

<u>วิธีทำ</u> ระลึกว่าสมการ2.2.3 นั้นจุดอ้างอิงต้องติดไปกับวัตถุ ในข้อ ก) นั้นเห็นโดยง่ายว่าเป็นจุดอ้างอิงเป็นจุดที่ติดไปกับคาน เพียงแต่ว่าเมื่อคานหมุนจุดนี้จะอยู่ที่เดิม(คือเป็นทั้งจุดที่ติดกับวัตถุและเป็นทั้งจุดตรึง) ส่วนในข้อ ข)นั้นถ้าเราจินตนาการว่ามีแท่งเบาๆเชื่อมระหว่างปลายคานกับจุดอ้างอิง แล้วมองทั้งคานทั้งแท่งเบารวมกันเป็นวัตถุ จุดอ้างอิงก็จะเป็นจุดที่ติดไปกับวัตถุเช่นกัน โดยเมื่อคานหมุนจุดนี้จะอยู่ที่เดิมคือเป็นจุดตรึงด้วย

ก) ถ้าใช้จุดอ้างอิงเป็นจุดกำเนิดในรูป ต.ย.2.2.1ก. จากตัวอย่างที่ 2.2.1 จะได้ $I_{xz}=0$, $I_{yz}=0$, $I_{zz}=\frac{1}{3}ML^2$ ดังนั้น สมการ 2.2.3 จึงเป็น

$$\tau_x=0\ ,\ \tau_y=0,\ \tau_z=\frac{1}{3}ML^2\,\alpha$$

ข)ถ้าใช้จุดอ้างอิงเป็นจุดกำเนิดในรูป ต.ย.2.2.1ข. จากตัวอย่างที่ 2.2.1 จะได้ $I_{xz}=-\frac{MLc}{2}$, $I_{yz}=0$, $I_{zz}=\frac{1}{3}ML^2$ ดังนั้น สมการ 2.2.3 จึงเป็น

$$\tau_x=\left(-\frac{MLc}{2}\right)\alpha\,,\tau_y=\left(-\frac{MLc}{2}\right)\omega^2,\ \tau_z=\frac{1}{3}ML^2\,\alpha$$

จะเห็นว่าเมื่อเปลี่ยนจุดอ้างอิงจากข้อ ก) มาเป็นข้อ ข) τ_x และ τ_y เปลี่ยนไป

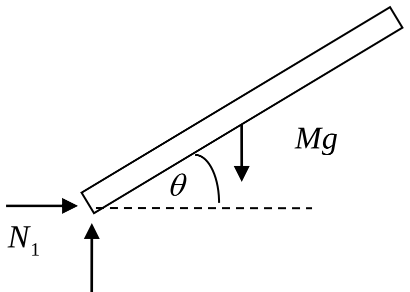
ตัวอย่างที่2.2.3 คานในตัวอย่าง 2.2.1 ปลายด้านซ้ายติดกับบานพับที่หมุนได้คล่อง ให้ N_1 และ N_2 เป็นแรงที่บานพับทำต่อปลายคาน

ก)ขณะที่คานทำมุม θ กับแนวระดับ ดังรูป ต.ย.2.2.3ก. ความเร่งเชิงมุมของคานเป็นเท่าใด

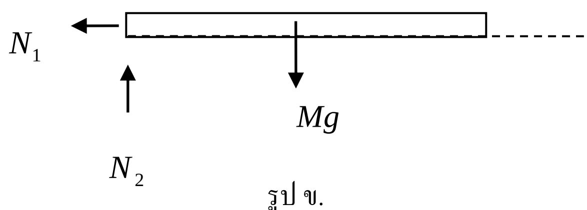
ข)ถ้าเดิมคานเกือบจะอยู่ในแนวดิ่ง จากนั้นปล่อยคานให้หมุน ในขณะที่คานอยู่ในแนวระดับดังรูป ต.ย. 2.2.3 ข. จงหาความเร็วเชิงมุม ω และจงหา N_1 และ N_2

ค)ถ้าเลือกจุดอ้างอิงอยู่บนแกนที่ตั้งฉากกับปลายคาน โดยอยู่ห่างจากปลายคานเป็นระยะ c

ดังรูป ต.ย. 2.2.1ข ขณะที่คานอยู่ในแนวระดับ ดังรูป ต.ย. 2.2.3ข. จงตรวจสอบว่า $\tau_x=I_{xz}\alpha-I_{yz}\omega^2$ และ $\tau_y=I_{yz}\alpha+I_{xz}\omega^2$ จริง



รูปต.ย.2.2.3 ก.



รูป ข.

<u>วิธีทำ</u> ก) เราเลือกจุดอ้างอิงที่ทำให้ง่ายที่สุดคือปลายคานที่บานพับติด ในรูป 2.2.3ก. นั้นเรายังไม่ระบุทิศของ N_1 จึงเขียนไปทาง $+x$ ไว้ก่อน ทอร์กของ N_1 และ N_2 เป็นศูนย์ มีเฉพาะทอร์กของน้ำหนัก Mg จากรูป ก.ทอร์กนี้มีค่าเท่ากับ $Mg\dfrac{L}{2}\cos\theta$ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ

ตามข้อตกลงของเรา เราให้แกน z อยู่ในแนวของความเร็วเชิงมุม ดังนั้น $\tau_z = -Mg\dfrac{L}{2}\cos\theta$ คือมีขนาดเป็น $Mg\dfrac{L}{2}\cos\theta$ ทิศชี้ไปทาง $-\hat{k}$

จาก $\tau_z = \dfrac{1}{3}ML^2\,\alpha$

จะได้ $$\alpha = -\frac{3g\cos\theta}{2L} \qquad (1)$$

<u>หมายเหตุ</u> จากภาคผนวก ง. จะเห็นว่าเราเลือก มุม θ ในรูป ต.ย.2.2.3ก กับทิศ $+z$ ในรูป ต.ย.2.2.1ข. ให้สอดคล้องกัน

ข)เนื่องจาก CM เคลื่อนที่เป็นวงกลม ดังนั้นในรูป ข. เรารู้ว่าความเร่งของ CM มีทิศไปทาง $-x$ จึงเขียน N_1 ให้มีทิศไปทาง $-x$

เนื่องจากความเร่งเชิงมุมไม่คงที่ คือขึ้นกับ θ เราจึงไม่หาความเร็วเชิงมุมจากความเร่งเชิงมุม แต่จะหาจากกฎการอนุรักษ์พลังงานกลแทน โดยในขณะที่คานหมุนนั้นพลังงานกลคงที่ ให้ระดับที่ผ่านจุดกำเนิดเป็นระดับอ้างอิงพลังงานศักย์โน้มถ่วง ดังนั้น

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2$$

$$\therefore \quad \omega^2 = \frac{3g}{L} \qquad (2)$$

จุดศูนย์กลางมวลของคานมีความเร่งในแนวดิ่งขนาดเป็น $\dfrac{L}{2}\alpha = \left(\dfrac{L}{2}\right)\dfrac{3g}{2L} = \dfrac{3g}{4}$ ทิศ $-\hat{j}$ (ชี้ลงในแนวดิ่ง)

ดังนั้น เมื่อดูในแนวดิ่ง $Mg - N_2 = M\dfrac{3g}{4}$

$$\therefore\ N_2 = \frac{1}{4}Mg \qquad \text{ทิศ } +\hat{j} \qquad (3)$$

จุดศูนย์กลางมวลของคานมีความเร่งในแนวระดับขนาดเป็น $\omega^2 \frac{L}{2}$ ทิศ $-\hat{i}$ (ชี้ไปทางซ้ายมือ)

ดังนั้น เมื่อดูในแนวระดับ $N_1 = M\omega^2 \frac{L}{2}$ ทิศ $-\hat{i}$ (แรงกับความเร่งต้องมีทิศเดียวกัน)

แทน ω^2 จากสมการ 2 ลงไป จะได้

$$N_1 = \frac{3}{2}Mg \qquad \text{ทิศ } -\hat{i} \qquad (4)$$

ค)จากรูป ข. จะเห็นว่า $\tau_x = Mgc - N_2 c = \frac{3}{4}Mgc$ (5)

ในสมการ 5 นั้น เราใช้สมการ 3 ช่วย

พิจารณา $I_{xz}\alpha - I_{yz}\omega^2$ จากตัวอย่างที่3.1 เราได้ $I_{xz} = -\frac{MLc}{2}$, $I_{yz} = 0$, จากสมการ 1 เมื่อคานอยู่ในแนวระดับ $\alpha = -\frac{3g}{2L}$

$$\text{ดังนั้น } I_{xz}\alpha - I_{yz}\omega^2 = \left(-\frac{MLc}{2}\right)\left(-\frac{3g}{2L}\right) = \frac{3}{4}Mgc \qquad (6)$$

จากสมการ 5 และ 6 จะเห็นว่า $\tau_x = I_{xz}\alpha - I_{yz}\omega^2$ จริง

จากรูป ข. จะเห็นว่า $\tau_y = -N_1 c$ (คือขนาด $N_1 c$ ทิศ $-\hat{j}$)

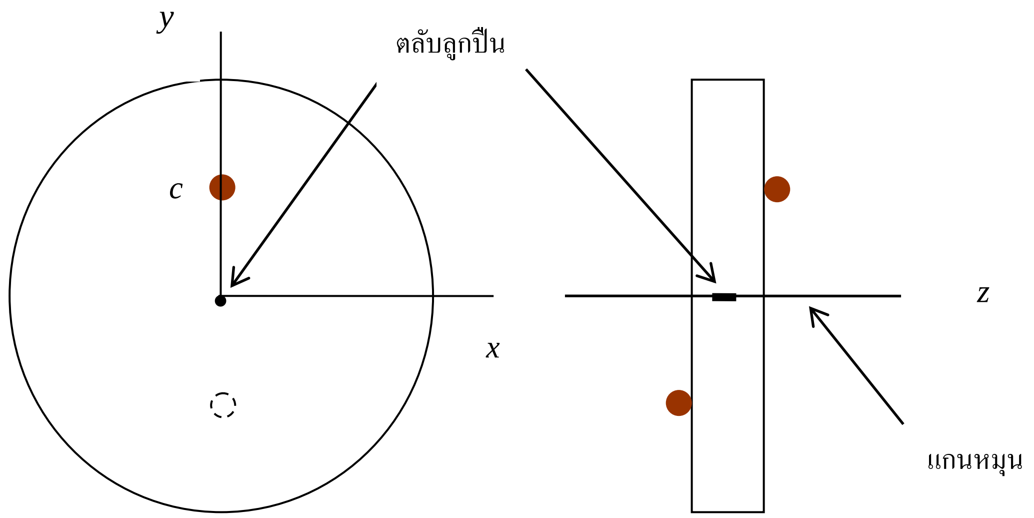
แทนสมการ 4 ลงไปจะได้ $\tau_y = -\frac{3}{2}Mgc$ (7)

พิจารณา และ $I_{yz}\alpha + I_{xz}\omega^2 = 0 + \left(-\frac{MLc}{2}\right)\left(\frac{3g}{L}\right) = -\frac{3}{2}Mgc$ (8)

จากสมการ 7 และ 8 จะเป็นว่า $\tau_y = I_{yz}\alpha + I_{xz}\omega^2$ จริง

ตัวอย่างที่ 2.2.4 ในตัวอย่างที่ 2.2.1-2.2.3 ที่ผ่านมานั้นเป็นการปูพื้นฐานเกี่ยวกับสมการ 2.2.3 ในตัวอย่างที่ 2.2.4 นี้ จะเป็นตัวอย่างที่พบจริงในชีวิตประจำวัน

สมมติมีจานกลมสม่ำเสมอหนา b ตรงกลางจานมีตลับลูกปืน(bearing) ทำให้หมุนได้คล่องรอบแกนที่ตั้งฉากและผ่านจุดศูนย์กลางของจาน จานมีมวล m ขนาดเท่ากันสองก้อน ติดอยู่คนละด้านของจาน แต่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ c เท่ากัน ดังรูป ต.ย.2.2.4



รูปต.ย.2.2.4 ก. รูปมองจากบนลงล่าง แกน z พุ่งออกจากกระดาษ

รูป ข. รูปด้านข้าง

เพื่อความง่ายเราตั้งแกน xyz ให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางจาน แกน z ตั้งฉากกับจาน พิกัดในแกน x, y และ z ของมวลก้อนแรกคือ $(0,c,\frac{b}{2})$ ของก้อนที่สองคือ $(0,-c,-\frac{b}{2})$ เราดูจานและมวลทั้งสองรวมกันเป็นวัตถุ

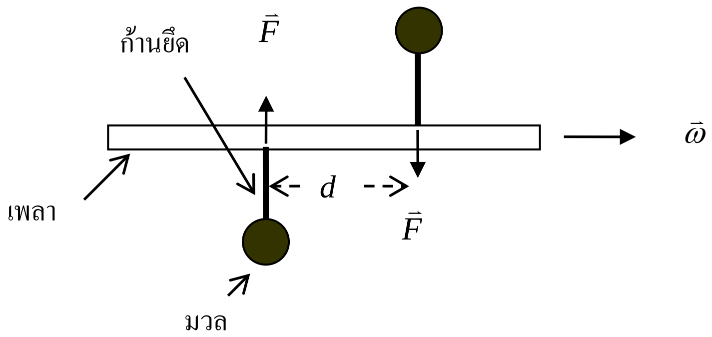
พิจารณา $I_{xz}=-\int xzdm$ เนื่องจากตัวจานมีสมมาตร I_{xz} เฉพาะของจานจึงเป็นศูนย์ นอกจากนี้มวลทั้งสองต่างอยู่ที่ $x=0$ คือ I_{xz} ของมวลทั้งสองก็เป็นศูนย์เช่นกัน ดังนั้น I_{xz} ของวัตถุเท่ากับศูนย์

พิจารณา $I_{yz}=-\int yzdm$ เนื่องจากตัวจานมีสมมาตร I_{yz} เฉพาะของจานจึงเป็นศูนย์ ส่วนของมวลก้อนแรกจะเป็น $-(c)(\frac{b}{2})m$ ของก้อนที่สองเป็น $-(-c)(-\frac{b}{2})m$ ของทั้งสองก้อนรวมกันเป็น $-cbm$ ดังนั้น I_{yz} ของวัตถุเท่ากับ $-cbm$ ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์

ในขณะที่จานไม่หมุน ระบบจะอยู่ในสมดุล คือตลับลูกปืนจะรับน้ำหนักของจานและมวลสองก้อนเท่านั้น แต่เมื่อจานหมุน แม้หมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ จากสมการ $\tau_x=(I_{xz}\alpha-I_{yz}\omega^2)$ จะมี

ทอร์ก τ_x จากตลับลูกปืนกระทำต่อจาน จานจะหมุนไม่เรียบมีอาการสั่นๆ ตลับลูกปืนจะมีอายุการใช้งานน้อยลงเพราะไม่ได้รับน้ำหนักอย่างเดียว นักศึกษาอาจเคยเห็นใบพัดลมที่บิ่นมีการหมุนแบบสั่นๆ ทั้งนี้เพราะใบพัดไม่สมมาตรแล้ว I_{xz} และ I_{yz} ไม่เป็นศูนย์

เพื่อให้เห็นที่มาของทอร์กในแนวตั้งฉากกับความเร็วเชิงมุม (คือ τ_x, τ_y) พิจารณามวลขนาดเท่ากันสองก้อนติดกับเพลาด้วยก้านยึดแต่ติดเยื้องกันดังรูปต.ย.2.2.4 ค.



รูป ต.ย.2.2.4ค. คู่ควบมีทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษตั้งฉากกับเพลา

เราจะพิจารณาจาก 2 มุมมอง มุมมองแรกมองในกรอบอ้างอิงเฉื่อย ถ้าเราพิจารณามวลหนึ่งก้อนและก้านยึดเป็นวัตถุ เมื่อเพลาหมุนความเร็วเชิงมุมของวัตถุมีทิศในแนวเพลา เราไม่จำเป็นต้องรู้ตำแหน่งที่แน่นอนของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนี้แต่เรารู้ว่าเมื่อเพลาหมุนจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแต่ละชิ้นเคลื่อนที่เป็นวงกลม สมมติเพลาหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ดังนั้นความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแต่ละชิ้นมีทิศพุ่งเข้าหาเพลา นั่นคือต้องมีแรงในทิศพุ่งเข้าหาเพลากระทำต่อวัตถุแต่ละชิ้น แรงนี้คือแรง $\vec{F}$ ในรูป ค. ที่เพลาดึงก้านยึดนั่นเอง จึงมีทอร์กของแรงนี้ในแนวตั้งฉากกับเพลา เนื่องจากขนาดแรงดึงเท่ากันแต่ทิศตรงกันข้าม จึงเป็นคู่ควบ(couple) ขนาดเป็น Fd มีทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษตั้งฉากกับเพลา นั่นคือเพลาไม่ได้เพียงแค่รับน้ำหนักของมวลและก้านยึดแต่ต้องออกแรงเพื่อให้เกิดทอร์ก(คู่ควบ)ในแนวตั้งฉากกับความเร็วเชิงมุมอีกด้วย

มุมมองที่สองมองจากกรอบอ้างอิงที่ติดไปกับมวลซึ่งเป็นกรอบอ้างอิงที่มีความเร่งเนื่องจากการหมุน ผู้สังเกตในกรอบอ้างอิงนี้จะบอกว่าตัวเองอยู่นิ่งแต่<u>จะรู้สึก</u>ว่ามีแรงเทียมที่เรียกว่า “แรงหนีศูนย์กลาง” เหวี่ยงเขาออกจากเพลา ดังนั้นถ้าเราพิจารณามวลหนึ่งก้อนและก้านยึดเป็นวัตถุ เมื่อมองจากกรอบอ้างอิงที่ติดไปกับวัตถุนี้จึงมีแรงสองแรงกระทำต่อวัตถุ คือแรงจริง $\vec{F}$ ที่เพลากระทำและ “แรงหนีศูนย์กลาง” ขนาด

เท่ากับแรง $\bar{F}$ ในรูป ต.ย.2.2.4ค.แต่ทิศตรงกันข้าม(เพราะเขาคิดว่าเขาอยู่นิ่ง) แรงที่เพลากระทำทำให้เกิดคู่ควบ Fd มีทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษตั้งฉากกับเพลาเช่นเดียวกับในมุมมองแรก จะเห็นว่าไม่ว่าจะมองจากกรอบอ้างอิงเฉื่อยหรือกรอบอ้างอิงที่มีความเร่งผลจะออกมาตรงกัน อย่างไรก็ตามนักศึกษาครูไม่ควรสอนแรงเทียมให้แก่เด็กนักเรียนเพราะจะทำให้เด็กสับสน การใช้แรงเทียมอาจทำให้การแก้ปัญหาสะดวกขึ้นแต่ผู้ใช้ต้องรู้ว่าตนเองกำลังทำอะไรอยู่ ที่นำมากล่าวในที่นี้เพราะต้องการให้นักศึกษาเข้าใจเมื่อไปเห็นคำอธิบายในทำนองนี้

หมายเหตุ ถ้าพิจารณาคำกล่าวที่ว่า “สมดุลต่อการหมุนเกิดเมื่อวัตถุอยู่นิ่งหรือหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่และจะได้ว่าโมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกาเท่ากับโมเมนต์ตามเข็มนาฬิกา” จะเห็นว่าโมเมนต์ทวน โมเมนต์ตามในที่นี้หมายถึง τ_z เท่านั้น ไม่ได้หมายถึง τ_x หรือ τ_y

2.2.2 สมการสำหรับปัญหาอย่างง่าย $\tau = I\alpha$ และข้อควรรู้บางอย่าง

ในหัวข้อ 2.2.1 นั้นเป็นการหมุนในระนาบของวัตถุรูปทรงใดๆซึ่งอาจมีหรือไม่มีสมมาตรก็ได้ แต่ในระดับมัธยมปลายหรือฟิสิกส์ทั่วไป 1 รูปร่างของวัตถุมักมีสมมาตร ตัวอย่างเช่น ทรงกระบอกสม่ำเสมอ ทรงกลมสม่ำเสมอ คานสม่ำเสมอ เป็นต้น จุดอ้างอิง(ซึ่งต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข 3 ข้อ) มักเป็นจุดที่ทำให้ I_{xz} และ I_{yz} เป็นศูนย์ ดังจะเห็นได้ในตัวอย่างที่ 2.2.5 และ 2.2.6

ตัวอย่างที่ 2.2.5 ทรงกระบอกสม่ำเสมอกลิ้งบนพื้นราบหรือพื้นเอียง

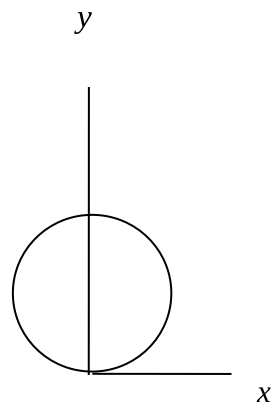
จุดอ้างอิงของสมการ 2.2.3 ที่ใช้ได้ตลอดคือจุดศูนย์กลางมวล ถ้าเป็นการกลิ้งโดยไม่ไถลจะมีจุดอ้างอิงที่ใช้ได้เพิ่มอีกจุดหนึ่งคือจุดบนทรงกระบอกตรงกลางเส้นที่ทรงกระบอกแตะพื้น จุดนี้มีความเร่งพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางมวล เราจะหา I_{xz} และ I_{yz} เมื่อจุดกำเนิดของพิกัด xyz อยู่ที่จุดอ้างอิงแต่ละจุด ระลึกว่าแกน z อยู่ในแนวของความเร็วเชิงมุมซึ่งก็คือแนวของแกนทรงกระบอก

1. จุดอ้างอิงอยู่ที่ศูนย์กลางมวล

จินตนาการเสียบกระจกเงาระนาบที่ระนาบ yz พิจารณาดูมวลเล็กๆ dm ตรงไหนก็ได้ในวัตถุซึ่งอยู่หน้ากระจก จะเห็นภาพของมวล dm ในวัตถุที่อยู่หลังกระจก ซึ่งก็คือที่ z ค่าหนึ่ง จะมี x สองค่า ขนาดเท่ากัน แต่เครื่องหมายต่างกัน ดังนั้น $I_{xz} = -\int xzdm = 0$

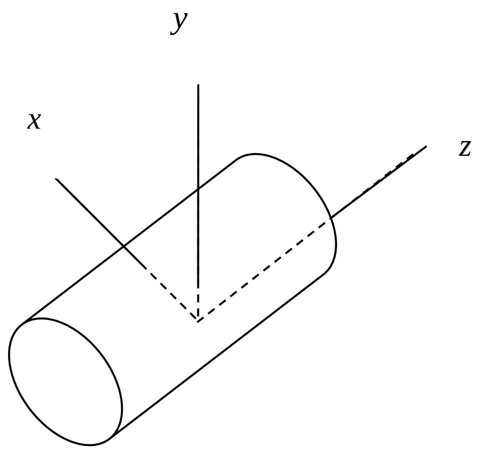
ในการพิจารณา $I_{yz} = -\int yzdm$ จินตนาการเสียบกระจกเงาที่ระนาบ xy จะเห็นว่าที่ y ค่าหนึ่ง จะมี z สองค่า ขนาดเท่ากัน แต่เครื่องหมายต่างกัน ดังนั้น $I_{yz} = 0$

2. จุดอ้างอิงอยู่ตรงกลางเส้นที่ทรงกระบอกแตะพื้น ดังรูปต.ย.2.2.5ก. และ ข.



รูปต.ย.2.2.5 ก. มองหน้าตัด

แกน z พุ่งออกจากกระดาษ



รูป ข. มองเอียง

จินตนาการเสียบกระจกเงาคล้ายๆข้อ ก) จะเห็นว่า $I_{xz} = -\int xzdm = 0$ และ $I_{yz} = -\int yzdm = 0$

ตัวอย่างที่ 2.2.6 ทรงกลมสม่ำเสมอกลิ้งบนพื้นราบหรือพื้นเอียง

จุดอ้างอิงของสมการ 2.2.3 ที่ใช้ได้ตลอดคือจุดศูนย์กลางมวล ถ้าเป็นการกลิ้งโดยไม่ไถลจะมีจุดอ้างอิงเพิ่มอีกจุดหนึ่งคือจุดบนทรงกลมที่ทรงกลมแตะพื้น เพราะมีความเร่งพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางมวล

พิจารณาคล้ายกับตัวอย่างที่ 2.2.5 จะเห็นว่าจุดอ้างอิงทั้งสอง $I_{xz} = 0$ และ $I_{yz} = 0$

เมื่อย้อนไปดูสมการ 2.2.3 ถ้า $I_{xz} = 0$ และ $I_{yz} = 0$ จะได้ว่า $\tau_x = 0$, $\tau_y = 0$ มีเฉพาะ $\tau_z = I_{zz}\alpha$ นอกจากนี้ในระดับมัธยมและฟิสิกส์ทั่วไป1 นั้นเราไม่สนใจสถานการณ์ที่ต้องใช้ τ_x และ τ_y ใช้เพียง τ_z ก็ได้คำตอบที่ต้องการแล้ว (ตัวอย่างเช่นการหมุนรอบแกนตรึงของ physical pendulum ซึ่ง I_{xz} และ I_{yz} อาจไม่เป็นศูนย์) ดังนั้น<u>หนังสือทั่วไปมักเขียนเพียงว่า</u>

$$\tau = I\alpha \qquad (2.2.4)***$$

<u>สมการ 2.2.4 เป็นสมการหลักที่เราจะใช้บรรยายการหมุนในระนาบ บางครั้งเรียกว่ากฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองกรณีการหมุนในระนาบ สมการนี้มีเงื่อนไขคือ</u>

1. ใช้ได้เฉพาะการหมุนในระนาบเท่านั้น

2. จุดอ้างอิงที่ใช้คำนวณทอร์กและโมเมนตัมเชิงมุมเป็น<u>จุดที่ติดไปกับวัตถุ</u>และจะต้อง ก.ไม่มีความเร่ง หรือ ข.มีความเร่งก็ได้ถ้าเป็นจุดศูนย์กลางมวล หรือ ค.ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้ามีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกผ่านศูนย์กลางมวล

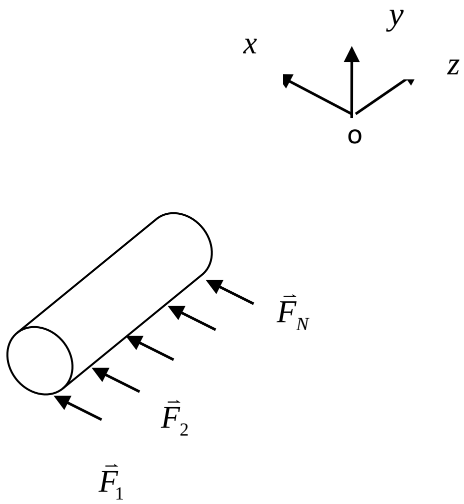
3. ทอร์ก τ เป็นองค์ประกอบของทอร์กในแนวของความเร็วเชิงมุม

4. โมเมนต์ความเฉื่อย I อ้างอิงเทียบกับแกนที่อยู่ในแนวของความเร็วเชิงมุมและผ่านจุดอ้างอิง

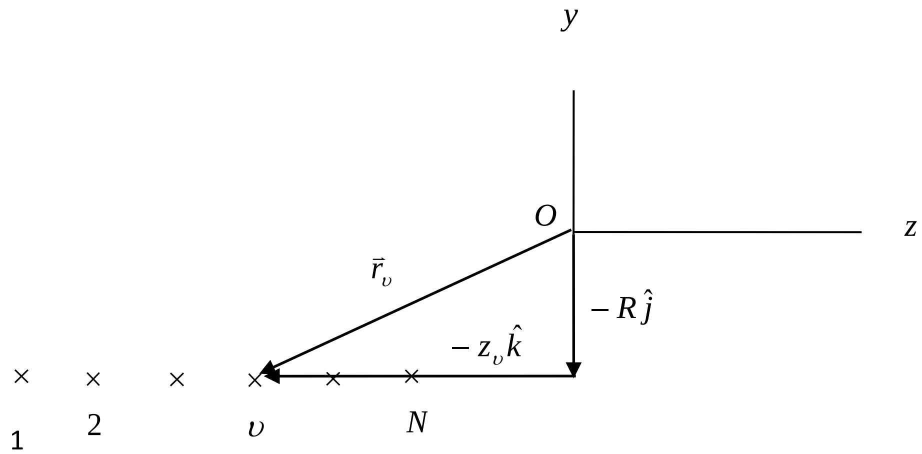
2.2.2.1 รูปฉายของวัตถุและแรง

ในการเขียนรูปของการหมุนในระนาบในระดับมัธยมและฟิสิกส์ทั่วไป1 เราเขียนรูปวัตถุและแรงที่กระทำต่อวัตถุลงบนระนาบของกระดาษ ทั้งที่แรงอาจกระจายอยู่ที่ตำแหน่งต่างๆบนวัตถุ เราจะมาดูว่าทำไมจึงเป็นเช่นนี้

เราจะใช้การกลิ้งของทรงกระบอกเป็นตัวอย่างในการพิจารณา รูป 2.2.1 ก. ทรงกระบอกรัศมี R กำลังกลิ้ง ตั้งแกน xyz ให้แกนทรงกระบอกอยู่ในแนวแกน z ซึ่งก็คือในแนวของความเร็วเชิงมุมดังข้อตกลงของเราที่แล้วมา จุดกำเนิด O ของพิกัด xyz อยู่ที่ใดก็ได้ ในที่นี้เราจะสมมติให้อยู่บนแนวแกนทรงกระบอก มีแรง $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_N$ ในแนวแกน x กระจายกันกระทำที่ผิวส่วนล่างสุดของทรงกระบอก ถ้ามองตามทิศของแรงเข้าไปจะเห็นเวกเตอร์ตำแหน่งของแรงเหล่านี้ ดังรูป 2.2.1ข.



รูป2.2.1ก. ทรงกระบอกรัศมี R ถูกแรง $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N$ กระทำที่ผิวด้านล่าง



รูป 2.2.1 ข. มองตามแกน x

ทอร์ก $\vec{\tau}$ ของแรง $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N$ อ้างอิงกับจุดกำเนิด O หาได้จาก

$$\vec{\tau} = (-R\hat{j} - z_1\hat{k}) \times F_1\hat{i} + (-R\hat{j} - z_2\hat{k}) \times F_2\hat{i} + ... + (-R\hat{j} - z_N\hat{k}) \times F_N\hat{i}$$

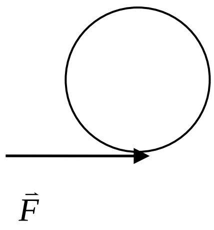
แต่ที่เราสนใจคือองค์ประกอบของทอร์กในแนวของความเร็วเชิงมุม ก็คือ τ_z โดย

$$\tau_z = (-R\hat{j}) \times F_1\hat{i} + (-R\hat{j}) \times F_2\hat{i} + ... + (-R\hat{j} \times F_N\hat{i}$$

$$= (-R\hat{j}) \times (F_1 + F_2 + ... + F_N)\hat{i} \quad = (-R\hat{j}) \times F\hat{i}$$

เมื่อ $F\hat{i} = \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N$

จะเห็นว่าการกระจายตำแหน่งของแรงในแนวของความเร็วเชิงมุมนั้นไม่มีผลต่อ τ_z ดังนั้นแทนที่จะเขียนเป็นรูป 3 มิติ เราจึงฉาย(project)ทั้งวัตถุทั้งแรงตามแนวความเร็วเชิงมุมลงบนกระดาษ โดย $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N$ ดังรูป 2.2.2



รูป 2.2.2 รูปฉายของรูป 2.2.1 แกน z พุ่งออกจากกระดาษและตั้งฉากกับระนาบกระดาษ

นักศึกษาจะเห็นว่ารูปฉายนี้เหมาะสมมากในการคำนวณ τ_z ดังนั้นการหมุนในระนาบระดับมัธยมและฟิสิกส์ 1 รูปที่เขียนจึงเป็นรูปแบนๆในกระดาษ ทิศของความเร็วเชิงมุมของวัตถุจะตั้งฉากกับระนาบของกระดาษเสมอ

2.2.2.2 ข้อพึงระวังเกี่ยวกับความเร่งของจุดที่ติดไปกับวัตถุ

จุดบนวัตถุที่อยู่นิ่ง(ชั่วขณะ) อาจมีความเร่งต่างกับจุดที่อยู่นิ่งนอกวัตถุ(จุดตรึง) ซึ่งจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

1.มวลติดสปริงวางบนพื้นลื่น ปลายหนึ่งของสปริงติดกับกำแพง มวลสั่นไปมาแบบซิมเปิลฮาร์มอนิก พิจารณาขณะที่มวลอยู่ตำแหน่งขวาสุด(หรือซ้ายสุด) มวลอยู่นิ่ง(ชั่วขณะ) เทียบกับจุดตรึงบนพื้น แต่มวลมีความเร่ง(เพราะมีแรงสปริงกระทำ)ในขณะที่จุดตรึงบนพื้นไม่มีความเร่ง

2.ทรงกลมกลิ้งโดยไม่ไถลบนพื้นราบ(หรือพื้นเอียง) ให้ A เป็นจุดบนผิวทรงกลม B เป็นจุดตรึงที่อยู่นิ่งบนพื้น ณ เวลาหนึ่งจุด A แตะทับกับ B ในขณะนี้ A อยู่นิ่ง(ชั่วขณะ) เทียบกับ B ความเร่งในแนวระดับ (หรือในแนวพื้นเอียง)ของจุด A เป็นศูนย์ แต่เนื่องจากจุด A เคลื่อนที่แบบวงกลม จุด A จึงมีความเร่งในทิศที่ชี้เข้าหาจุดศูนย์กลางของทรงกลมซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางมวลของทรงกลม

3.ทรงกระบอกกลิ้งโดยไม่ไถลบนพื้นราบ(หรือพื้นเอียง) ให้ A เป็นจุดบนผิวทรงกระบอกโดยอยู่ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของความสูงของทรงกระบอก B เป็นจุดตรึงที่อยู่นิ่งบนพื้น ณ เวลาหนึ่งจุด A แตะทับกับ B คล้ายๆกับข้อ 2 จะเห็นว่าแม้จุด A อยู่นิ่ง(ชั่วขณะ) แต่มีความเร่งในทิศเข้าหาจุดกึ่งกลางของแกนทรงกระบอกซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอก

จากที่กล่าวมาทำให้เราต้องระวังว่าจุดที่อยู่นิ่งไม่ได้หมายความว่าจุดนั้นจะไม่มีความเร่ง อาจมีก็ได้

2.2.2.3 ทฤษฎีแกนขนานและทฤษฎีแกนตั้งฉาก

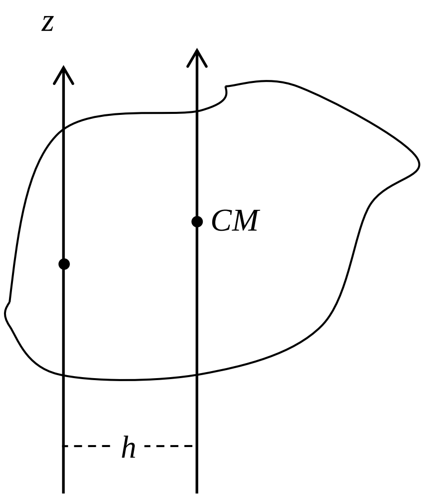
ก)ทฤษฎีแกนขนาน (parallel-axis theorem)

ทฤษฎีแกนขนานใช้ได้กับวัตถุรูปทรงใดๆก็ได้ ถ้าวัตถุมวล M มีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลเป็น I_{CM} โมเมนต์ความเฉื่อย I ของวัตถุนี้รอบแกนใดๆซึ่งขนานกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลและอยู่ห่างกันเป็นระยะ h มีค่าเป็น

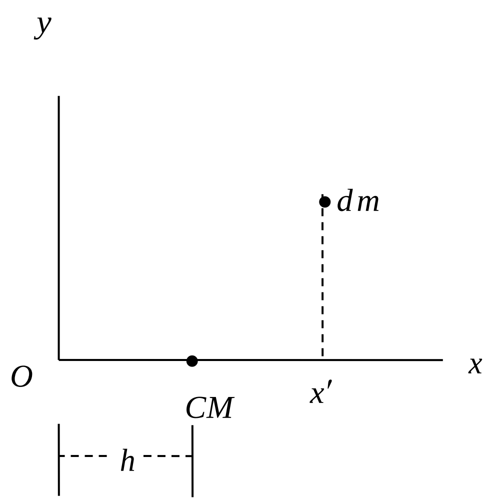
$$I = I_{CM} + Mh^2$$

สมการข้างบนนี้เรียกว่าทฤษฎีแกนขนาน

พิสูจน์ รูป 2.2.3ก.แสดงแกนขนานสองแกนเมื่อมองจากด้านข้าง ส่วนรูป 2.2.3 ข. นั้นมองจากด้านบนลงมา เราให้แกน x อยู่บนแนวเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนทั้งสอง



รูป 2.2.3 ก.



ข. มองย้อนแกน z ลงมา

ในรูป 2.2.3 ข. x' คือพิกัดในแนวแกน x ของมวล dm อ้างอิงกับ CM

เราจะหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z ระยะทางตั้งฉากจากมวล dm มายังแกน z คือ $\sqrt{(h+x')^2+y^2}$

$$\because I = \int \{(h+x')^2 + y^2\}\, dm = \int (h^2 + 2hx' + x'^2 + y^2)\, dm$$

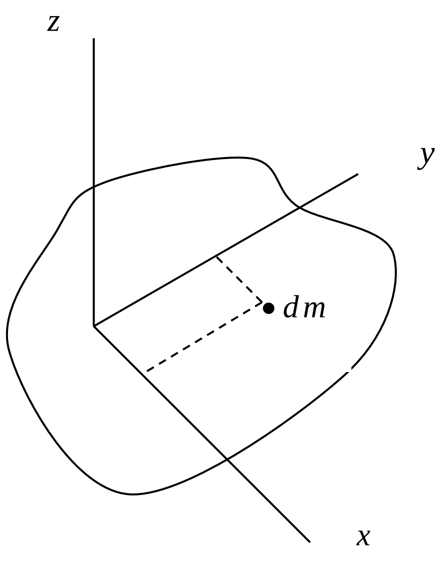
$$= \int (x'^2 + y^2) dm + 2h \int x' dm + h^2 \int dm$$

แต่จากสมการ 4 หน้า 2 $\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} x'_{\upsilon} = 0$ ซึ่งก็คือ $\int x' dm = 0$

ดังนั้น $I = \int (x'^2 + y^2) dm + h^2 \int dm = I_{CM} + Mh^2$

ข)ทฤษฎีแกนตั้งฉาก

ทฤษฎีแกนตั้งฉากใช้ได้กับวัตถุที่เป็นแผ่นบางในระนาบ โดยโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุที่เป็นแผ่นบางๆ ในระนาบ รอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบของแผ่น จะมีค่าเท่ากับผลบวกของโมเมนต์ความเฉื่อยของแกนทั้งสองที่ตั้งฉากกันบนระนาบของแผ่นนั้น



รูป 2.2.4 วัตถุเป็นแผ่นบางอยู่ในระนาบ xy

จากรูป 2.2.4 พิจารณามวล dm ซึ่งอยู่ห่างจากแกน z เท่ากับ $\sqrt{x^2+y^2}$

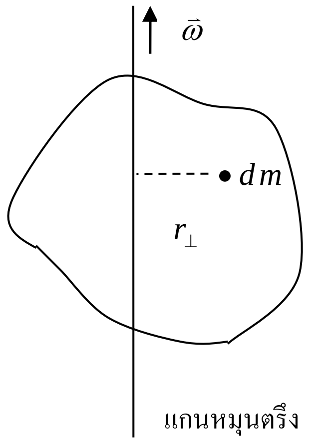
โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z , $I_z = \int (x^2+y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm$

นั่นคือ $I_z = I_x + I_y$

3.งาน-พลังงาน

3.1 พลังงานจลน์ของวัตถุแข็งเกร็งเมื่อวัตถุหมุนในระนาบ

3.1.1 พลังงานจลน์เมื่อวัตถุหมุนรอบแกนตรึง



รูปที่ 3.1.1

สมมติวัตถุแข็งเกร็งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ รอบแกนหมุนตรึง (แกนหมุนที่ไม่ได้เคลื่อนที่) ดังรูปที่ 3.1.1

โดย dm เป็นมวลเล็กๆชิ้นหนึ่งอยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะทาง $r_\perp$

อัตราเร็วของมวล dm อ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อยคือ $v = \omega r_\perp$

ดังนั้น พลังงานจลน์ของมวลเล็กๆนี้ เท่ากับ $\frac{1}{2}(\omega r_\perp)^2 dm$

พลังงานจลน์ของวัตถุทั้งก้อนเนื่องจากการหมุนหาได้จากการรวม(ด้วยการอินทิเกรต) คือ

$$E_k = \int \frac{1}{2}(\omega r_\perp)^2 \, dm$$

ขณะนี้เราอินทิเกรตเทียบกับมวลเล็กๆ dm จะเห็นว่าไม่ว่าจะเป็นมวลเล็กๆชิ้นใดก็ตามต่างก็มีอัตราเร็วเชิงมุม ω เดียวกัน ดังนั้น ω จึงเป็นค่าคงที่ดึงออกนอกเครื่องหมายอินทิเกรตได้เป็น

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \int (r_\perp)^2 dm$$

สังเกตว่าเมื่อเราให้แกน z ทับกับแกนหมุน $(r_\perp)^2$ ก็คือ $x^2 + y^2$ หรือ $\int \frac{1}{2}(r_\perp)^2\, dm = I_{zz}$ นั่นเอง ซึ่งเราเขียนสั้นๆเป็น I ดังนั้น

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (3.1.1)^{**}$$

ระลึกว่าสมการนี้ใช้กับแกนหมุนที่อยู่นิ่ง จะเป็นแกนที่อยู่นิ่งชั่วขณะก็ใช้ได้ ตัวอย่างเช่น ทรงกระบอกกลิ้งโดยไม่ไถล ผิวทรงกระบอกที่แตะพื้นเป็นแกนที่อยู่นิ่งชั่วขณะจึงสามารถใช้แกนนี้คำนวณพลังงานจลน์ของทรงกระบอกตามสมการ 3.1.1 ได้

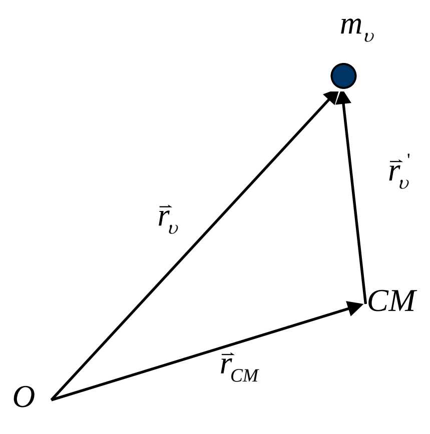
3.1.2 พลังงานจลน์เมื่อวัตถุหมุนรอบแกนไม่ตรึง

ตัวอย่างของการหมุนรอบแกนไม่ตรึงเช่นการกลิ้งของทรงกระบอกไม่ว่าจะไถลหรือไม่ก็ตาม ซึ่งมองได้ว่าทรงกระบอกหมุนรอบแกนกลางโดยแกนนี้เคลื่อนที่ไปด้วย

เพื่อความสะดวกจะพิจารณาวัตถุแข็งเกร็งเป็นระบบอนุภาคที่ระยะห่างระหว่างอนุภาคคงที่ รูป 3.1.2 เป็นระบบอนุภาคแต่เพื่อความชัดเจนเราจึงเขียนอนุภาคเพียงแค่ตัวเดียว คือตัวที่ υ

ให้ O เป็นจุดกำเนิด(ของเวกเตอร์ตำแหน่ง)ซึ่งเป็นจุดตรึง

พิจารณาอนุภาคตัวที่ υ ซึ่งมีมวล m_υ



รูป 3.1.2

$\vec{r}_{\upsilon}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวลตัวที่ υ

$\vec{r}_{CM}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบเทียบกับจุด O

$\vec{r}_{\upsilon}'$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ υ เทียบกับจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาคนี้

เพราะว่า พลังงานจลน์ของระบบอนุภาคคือผลรวมของพลังงานจลน์อนุภาคแต่ละตัว ดังนั้น

พลังงานจลน์ของระบบ $E_k = \sum_{\upsilon} \frac{1}{2} m_{\upsilon} v_{\upsilon}^2$ (3.1.2)

แต่ $v_{\upsilon}^2 = \vec{v}_{\upsilon} \cdot \vec{v}_{\upsilon}$ ดังนั้น $E_k = \sum_{\upsilon} \frac{1}{2} m_{\upsilon} \vec{v}_{\upsilon} \cdot \vec{v}_{\upsilon}$

จากรูป 3.1.2 $\vec{r}_{\upsilon} = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_{\upsilon}'$ หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้

$$\dot{\vec{r}}_{\upsilon} = \dot{\vec{r}}_{CM} + \dot{\vec{r}}_{\upsilon}'$$

หรือ $\vec{v}_{\upsilon} = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{\upsilon}'$ (3.1.3)

เมื่อ $\vec{v}_{CM}$ คือความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลอ้างอิงกับจุด O ที่อยู่นิ่ง

คือความเร็วของอนุภาคตัวที่ υ อ้างอิงกับจุดศูนย์กลางมวล

หาผลคูณเชิงสเกลาร์ของสมการ (3.1.3) จะได้ว่า

$$\vec{v}_{\upsilon} \cdot \vec{v}_{\upsilon} = (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_{\upsilon}') \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_{\upsilon}')$$

$$= \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{\upsilon}' + \vec{v}_{\upsilon}' \cdot \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{\upsilon}' \cdot \vec{v}_{\upsilon}'$$

แต่ $\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{\upsilon}' = \vec{v}_{\upsilon}' \cdot \vec{v}_{CM}$

ดังนั้น $v_{\upsilon}^2 = v_{CM}^2 + 2(\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{\upsilon}') + {v_{\upsilon}'}^2$ (3.1.4)

แทนสมการ (3.1.4) ลงใน (3.1.2) จะได้

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} v_{CM}^2 + \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} (\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{\upsilon}') + \frac{1}{2} \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} {v_{\upsilon}'}^2$$

$$= \frac{1}{2} v_{CM}^2 \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} + \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} (\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{\upsilon}') + \frac{1}{2} \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} {v_{\upsilon}'}^2$$

$$= \frac{1}{2} M\, v_{CM}^2 + \bar{v}_{CM} \cdot (\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \bar{v}_{\upsilon}') + \frac{1}{2} \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} v_{\upsilon}'^{\,2} \qquad (3.1.5)$$

แต่ $\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \bar{v}_{\upsilon}'$ คือ โมเมนตัมของระบบอ้างอิงกับจุดศูนย์กลางมวล ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$E_k = \frac{1}{2} M\, v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} v_{\upsilon}'^{\,2} \qquad (3.1.6)^{**}$$

พิจารณาสมการ (3.1.6) จะเห็นว่า พลังงานจลน์ของระบบประกอบด้วย 2 ส่วน

ส่วนแรก เป็นพลังงานจลน์ของการเลื่อนที่ โดยคิดคล้ายกับว่ามวลทั้งหมดของระบบไปอัดอยู่ที่ศูนย์กลางมวล

ส่วนที่สอง เป็นพลังงานจลน์ของสมาชิกอ้างอิงกับจุดศูนย์กลางมวล

อนึ่ง สมการ (3.1.6) เป็นจริงเสมอ ไม่ว่าสมาชิกแต่ละตัวจะเคลื่อนที่อย่างไร คือ อาจเคลื่อนที่เป็นแนวตรง แนวโค้ง หมุน หรือสั่น ก็ได้

ในกรณีวัตถุแข็งเกร็ง เนื่องจากระยะห่างระหว่างสมาชิกคงที่ การเคลื่อนที่ของสมาชิกเทียบกับจุดศูนย์กลางมวลจึงเป็นการหมุนรอบจุดศูนย์กลางมวล จากสมการ (3.1.6) จะได้ว่าพลังงานจลน์ของการหมุนรอบแกนหมุนที่ผ่านศูนย์กลางมวลเท่ากับ $\frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2$ ดังนั้น สมการ (3.1.6) จะเป็น

$$E_k = \frac{1}{2} M\, v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 \qquad (3.1.7)^{**}$$

นั่นคือ <u>เมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนไม่ตรึง พลังงานจลน์หาได้จากผลรวมของพลังงานจลน์เนื่องจากการเลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวล กับพลังงานจลน์เนื่องจากการหมุนรอบแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล</u>

3.2 งาน-พลังงาน ในกรณีแกนหมุนตรึง

สมมติมีแรง(ลัพธ์)ภายนอก $\bar{F}$ กระทำต่อวัตถุแข็งเกร็งทำให้วัตถุหมุนรอบแกนตรึง การหมุนรอบแกนตรึงเป็นการหมุนในระนาบ เราจึงใช้สมการ $\tau = I\,\alpha$ ได้ดังได้กล่าวมาแล้ว

$$\because \tau = I\,\alpha = I\,\frac{d\omega}{dt}$$

จากกฎลูกโซ่จะได้ว่า $\dfrac{d\omega}{dt} = \left(\dfrac{d\omega}{d\theta}\right)\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right) = \left(\dfrac{d\omega}{d\theta}\right)\omega$

ดังนั้น $\tau = I\,\omega\dfrac{d\omega}{d\theta}$ (3.2.1)

สมการ 3.2.1 เขียนบรรยายอีกแบบ ได้เป็น $\tau\, d\theta = I\,\omega\, d\omega$

อินทิเกรตตั้งแต่เริ่มต้น จนถึงสุดท้าย $\int_i^f \tau\ d\theta\ = \int_i^f I\omega\, d\omega = \frac{1}{2}I\ \omega_f^2 - \frac{1}{2}I\ \omega^2 = \Delta E_k$

เราเรียก $\int_i^f \tau\ d\theta$ ว่างาน W ดังนั้น

$$W = \int_i^f \tau\, d\theta\ = \frac{1}{2}I\ \omega_f^2 - \frac{1}{2}I\ \omega_i^2\ = \Delta E_k$$ (แกนหมุนตรึง) (3.2.2)**

โดยทอร์กเป็นทอร์กของแรงภายนอก และ I เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนตรึง

3.3 งาน-พลังงาน ในกรณีแกนหมุนรอบแกนไม่ตรึง

สมมติมีแรง(ลัพธ์)ภายนอก $\vec{F}$ กระทำต่อวัตถุแข็งเกร็ง โดยจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนี้เคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ และขณะเดียวกันวัตถุนี้ก็หมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองแบบเลื่อนที่ $\vec{F} = M\,\vec{a}_{CM} = M\,\dfrac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$

นำมา dot กับการกระจัดสั้นๆของจุดศูนย์กลางมวล คือ $d\,\vec{r}_{CM}$ จะได้

$$\vec{F}\cdot d\,\vec{r}_{CM} = M\,\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}\cdot d\,\vec{r}_{CM}$$

อินทิเกรตตั้งแต่เริ่มต้น จนถึงสุดท้าย เป็น

$$\int_i^f \vec{F}\ \cdot d\vec{r}_{CM}\ = \int_i^f \left(\frac{d}{dt}M\,\vec{v}_{CM}\right)\cdot d\,\vec{r}_{CM}$$

$$= M\int_i^f \left(\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}\right)\cdot\vec{v}_{CM}\,dt = M\int_i^f\ (d\vec{v}_{CM})\cdot\vec{v}_{CM} = \frac{1}{2}M\int_i^f\ d(\vec{v}_{CM}\ \cdot\vec{v}_{CM}) = \frac{1}{2}M\int_i^f\ dv_{CM}^2$$

$$=\frac{1}{2}Mv_{CM,f}^2 - \frac{1}{2}Mv_{CM,i}^2 = \Delta E_{k,CM}^{trans}$$

เราเรียก $\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}_{CM}$ ว่า W_{CM}^{trans} ดังนั้น

$$W_{CM}^{trans} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}_{CM} = \frac{1}{2}Mv_{CM,f}^2 - \frac{1}{2}Mv_{CM,i}^2 = \Delta E_{k,CM}^{trans} \qquad (3.3.1)$$

พึงสังเกตว่าแม้ $\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}_{CM}$ <u>เป็นพจน์ที่คล้ายกับงาน แต่ไม่ใช่งานที่แรง $\vec{F}$ ทำต่อวัตถุ</u> เพราะ $d\vec{r}_{CM}$ เป็นการกระจัดของจุดศูนย์กลางมวล ซึ่งไม่จำเป็นต้องเท่ากับการกระจัดของแรง $\vec{F}$

เมื่อดูการเคลื่อนที่แบบหมุนซึ่งเป็นการหมุนในระนาบ ในกรณีนี้เราจะใช้จุดศูนย์กลางมวลเป็นจุดอ้างอิงสำหรับสมการ $\tau = I\alpha$ การทำคณิตศาสตร์จะคล้ายๆหัวข้อ 3.2 คือ

$$W_{CM}^{rot} = \int_i^f \tau_{CM}\, d\theta = \int_i^f \left(\frac{d}{dt} I_{CM}\,\omega\right) d\theta = \int_i^f I_{CM}\, d\omega \left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \int_i^f I_{CM}\,(d\omega)\,\omega = \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega_i^2 = \Delta E_{k,CM}^{rot} \qquad (3.3.2)$$

แต่จากสมการ 3.1.7 $E_k = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega^2$

หรือก็คือ $\Delta E_k = \Delta\{\frac{1}{2}Mv_{CM}^2\} + \Delta\{\frac{1}{2}I_{CM}\,\omega^2\}$

ดังนั้น $W_{CM}^{trans} + W_{CM}^{rot} = \Delta E_k$ (3.3.3)**

นั่นคือพลังงานจลน์ของวัตถุที่เปลี่ยนไปจะต้องคิดว่ามาจากทั้งพจน์ที่คล้ายงานจากการเลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวล และทั้งจากพจน์ $\int_i^f \tau_{CM}\, d\theta$ ที่เราเรียกว่า W_{CM}^{rot}

อย่างไรก็ตามเราไม่นิยมใช้สมการ 3.3.3 แต่ที่นำมากล่าวในที่นี้เพียงเพื่อให้นักศึกษาได้รู้ไว้

4.การดลเชิงมุม-โมเมนตัมเชิงมุม

ในหัวข้อ2.1 เราได้ความสัมพันธ์ $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ซึ่งเขียนบรรยายใหม่ได้เป็น $\vec{\tau}\, dt = d\vec{L}$ เมื่อ

อินทิเกรตตั้งแต่เริ่มต้นจนถึงสุดท้ายจะได้

$$\int_i^f \bar{\tau}\, dt = \bar{L}_f - \bar{L}_i = \Delta \bar{L} \tag{4.1}$$

พจน์ $\int_i^f \bar{\tau}\, dt$ เรียกว่าการดลเชิงมุม ดังนั้น

การดลเชิงมุม = โมเมนตัมเชิงมุมที่เปลี่ยนไป (4.2)

เนื่องจากสมการ 4.1 ได้มาจากสมการ $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt}$ ซึ่งเงื่อนไขของจุดอ้างอิงซึ่งมี 3 จุด คือ1.จุดตรึง 2. จุดศูนย์กลางมวล 3.จุดที่มีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกผ่านจุดศูนย์กลางมวล แต่ในกรณีการดล-โมเมนตัมเชิงมุมนี้ ในทางปฏิบัติเราจะใช้จุดอ้างอิงเพียง 2 จุด คือ1.จุดตรึง 2.จุดศูนย์กลางมวล

สมการ4.1 นั้น ทางซ้ายมือคือ $\int_i^f \bar{\tau}\, dt$ เป็นเวกเตอร์ ทางขวามือคือ $\Delta\bar{L}$ ก็เป็นเวกเตอร์ เนื่องจากเวกเตอร์ทั้งสองเท่ากันองค์ประกอบในแนวใดๆก็จะเท่ากัน แต่ได้กล่าวมาแล้วว่าการหมุนในระนาบระดับมัธยมและฟิสิกส์ทั่วไป 1 องค์ประกอบที่ตรงประเด็นคือองค์ประกอบในแนวของความเร็วเชิงมุม ซึ่งเราให้แกน z อยู่ในแนวนี้ ดังนั้น

$$\left(\int_i^f \bar{\tau}\, dt\right)_z = \left(\Delta\bar{L}\right)_z$$

แต่ $$\left(\int_i^f \bar{\tau}\, dt\right)_z = \int_i^f \tau_z dt$$

ดังนั้น $$\int_i^f \tau_z dt = \left(\Delta L\right)_z \qquad \text{(หมุนในระนาบ)} \qquad (4.3)^{**}$$

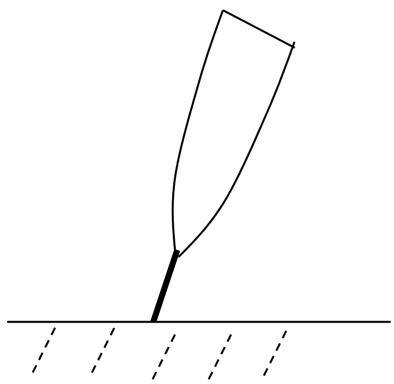
ก็คือในแนวแกน z การดลเชิงมุม = โมเมนตัมเชิงมุมที่เปลี่ยนไป

จากสมการ 1.3.8 ไม่ว่าวัตถุจะมีสมมาตรหรือไม่ก็ตาม เมื่อวัตถุหมุนในระนาบโมเมนตัมเชิงมุมในแนวของความเร็วเชิงมุม(แนว z) เท่ากับ $I\omega$ เสมอ ดังนั้นถ้า τ_z เป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงมุมในแนว z จะคงที่ ซึ่งก็คือ $I\omega$ คงที่นั่นเอง (เรียกว่ากฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมสำหรับระดับมัธยมและฟิสิกส์ทั่วไป1)

5.ตัวอย่าง

ตัวอย่างต่อไปนี้ต้องการให้นักศึกษาเข้าใจการหมุนในระนาบอย่างง่ายระดับมัธยมและฟิสิกส์ทั่วไป 1 รวมทั้งเป็นตัวอย่างในการวิเคราะห์ปัญหา เมื่อนักศึกษาไปเป็นครู<u>สิ่งที่ไม่ควรทำคือการยกสมการมาใช้โดยไม่มีคำอธิบายให้นักเรียนฟัง</u> ตัวอย่างเช่นบอกนักเรียนแต่เพียงว่าจากกฎการอนุรักษ์พลังงานกล จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น หรือจากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม แล้วก็เขียนสมการให้นักเรียนดู แก้สมการแล้วก็ได้คำตอบออกมา แม้การสอนจะมีข้อจำกัดเรื่องเวลาเรียนแต่ก็ควรมีคำอธิบายประกอบบ้าง

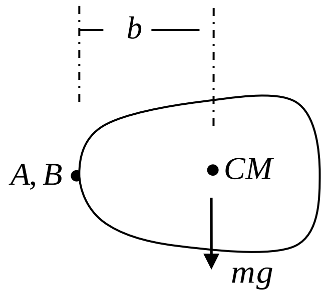
ตัวอย่างที่ 5.1 สมการ $\tau = I\alpha$ ใช้กับลูกข่างใช้ไม่ได้เพราะไม่ใช่การหมุนในระนาบ



รูป ต.ย.5.1 แสดงลูกข่างที่กำลังหมุน การหมุนของลูกข่างนั้นนอกจากจะหมุนรอบแกนสมมาตรของลูกข่างแล้ว แกนสมมาตรนี้ยังควงและอาจมีการกระดกขึ้นลงอีกด้วย ดูจุดใดก็ได้บนลูกข่าง จุดนี้ไม่ได้เคลื่อนที่ในระนาบ การหมุนของลูกข่างจึงไม่ใช่การหมุนในระนาบ ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้สมการ $\tau = I\alpha$

ตัวอย่างที่ 5.2 จุดอ้างอิงของสมการ $\tau = I\alpha$ ต้องเป็นจุดที่ติดไปกับวัตถุและสอดคล้องกับเงื่อนไข 3 ข้อ

สมมติปล่อยวัตถุมวล m ลงมาตรงๆโดยไม่ให้มีการหมุน ให้ A เป็นจุดที่ติดบนปลายด้านซ้ายวัตถุ B เป็นจุดตรึงนอกวัตถุ ณ ขณะหนึ่ง A ทับกับ B ดังในรูป ต.ย.5.2



รูป ต.ย.5.2

ถ้าเราเลือก A เป็นจุดอ้างอิง มีทอร์กของน้ำหนัก mg ขนาดเป็น mgb เมื่อเราใช้สมการ $\tau = I\alpha$ วัตถุน่าจะหมุนเพราะมีความเร่งเชิงมุม แต่จากประสบการณ์เรารู้ว่าวัตถุจะตกลงมาโดยไม่หมุน ทั้งนี้เพราะจุด A ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวลแต่จุด A มีความเร่งและทิศของความเร่งซึ่งลงมาในแนวดิ่งไม่ได้ผ่านจุดศูนย์กลางมวล จึงใช้สมการ $\tau = I\alpha$ ไม่ได้ ในมุมกลับถ้าเราเลือกจุดศูนย์กลางมวลเป็นจุดอ้างอิงทอร์กจะเป็นศูนย์ ความเร่งเชิงมุมของวัตถุก็เป็นศูนย์สอดคล้องกับความเป็นจริง

เพื่อเป็นตัวอย่างเราจะใช้จุดตรึง B เป็นจุดอ้างอิงบ้าง จากสมการ (ค4) ในภาคผนวก ค. $\vec{L}_{fixed} = \vec{L}_{orbit} + \vec{L}_{spin}$ จะได้ $L_{B'} = mbv_{CM} + L_{spin}$ เมื่อ v_{CM} คือความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล สมมติว่าเราปล่อยวัตถุด้วยความเร็วต้น u ในแนวดิ่ง จะได้ $v_{CM} = u + gt$

ดังนั้น $L_{B'} = mb(u + gt) + L_{spin}$

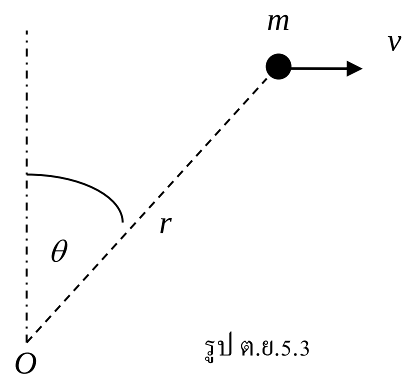
หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้ $\left.\dfrac{dL_B}{dt}\right|_{B'} = mb\, g + \dfrac{d}{dt}(I_{CM}\omega)$

จาก $\quad \vec{\tau}_B = \dfrac{d\vec{L}_B}{dt} \rightarrow \therefore\ mbg = \dfrac{dL_B}{dt} = mbg + \dfrac{d}{dt}(I_{CM}\omega)$

จะได้ว่า $\dfrac{d\omega}{dt} = 0$ คือ ω คงที่ เนื่องจากเมื่อเริ่มต้นวัตถุไม่หมุน $\omega = 0$ ดังนั้นขณะที่มันตกลงมามันจึงไม่หมุนเช่นเดิมสอดคล้องกับความเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 5.3 ข้อแตกต่างบางอย่างของจุดอ้างอิงของสมการ $\tau = I\alpha$ กับ $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

อนุภาคมวล m เคลื่อนที่แนวตรงด้วยอัตราเร็วคงที่ v ไม่มีแรงใดๆกระทำต่ออนุภาคนี้ ดังนั้นทอร์กอ้างอิงกับจุดใดๆเป็นศูนย์ทั้งนั้น ให้ O เป็นจุดตรึงดังรูป ต.ย.5.3 ทอร์กรอบจุด O เท่ากับศูนย์



รูป ต.ย.5.3

.

จากหัวข้อ 1.2.1 เมื่ออ้างอิงกับจุด O อัตราเร็วเชิงมุม $\omega = \dfrac{v\cos\theta}{r}$ ดังนั้น $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} \neq 0$ ซึ่งก็คือสมการ $\tau = I\alpha$ ไม่เป็นความจริง ดูคล้ายกับเกิดข้อขัดแย้ง

ถ้าเรามองว่าเส้นประ Om เป็นแท่งวัสดุแข็งและเบามีมวล m ติดอยู่ที่ปลายด้านหนึ่ง จะเห็นว่าจุด O <u>ไม่ใช่จุดที่ติดไปกับวัตถุ</u> เพราะถ้าเป็นจุดที่ติดไปกับวัตถุจุด O ต้องเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยอัตราเร็ว v เท่ากับอัตราเร็วของมวล m เมื่อจุดอ้างอิงไม่ได้ติดไปกับวัตถุ สมการ $\tau = I\alpha$ จึงไม่เป็นจริง

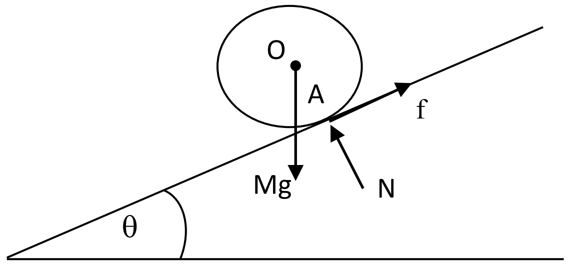
ถ้าลองใช้สมการ $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt}$ จะได้ว่า $\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(mvr\cos\theta\right) = -mvr\dot{\theta}\sin\theta + mv\dot{r}\cos\theta$. ถ้าแตก v ออกเป็นองค์ประกอบในแนว r และแนวตั้งฉากกับ r จะได้ โดยใช้ plane polar coordinates จะได้ $v\sin\theta = \dot{r}$ และ $v\cos\theta = r\dot{\theta}$. ดังนั้น จะได้ $\dfrac{dL}{dt} = 0$ คือ $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt}$ เป็นศูนย์ สอดคล้องกับความเป็นจริง นี่เป็นตัวอย่างที่แสดงว่าในขณะที่สมการ $\tau = I\alpha$ มีข้อจำกัดว่าจุดอ้างอิงต้องติดไปกับวัตถุ แต่สมการ $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt}$ ไม่ได้มีข้อจำกัดนี้

ตัวอย่างที่5.4 ทรงกระบอกกลิ้งโดยไม่ไถลลงมาตามพื้นเอียง

ทรงกระบอกสม่ำเสมอมวล M รัศมี R กลิ้งโดยไม่ไถลลงมาตามพื้นเอียงดังรูป ต.ย.5.4ก. เดิมทรงกระบอกอยู่นิ่งที่ความสูง h จากพื้นราบ $(I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2)$

ก) เมื่อถึงพื้นราบทรงกระบอกมีความเร็ว(ความเร็วของCM)เท่าใด

ข) ใช้เวลาเท่าใดจึงถึงพื้นราบ



รูป ต.ย.5.4ก.

<u>วิธีทำ</u> เราจะใช้ตัวอย่างนี้เป็นตัวแทนในการพิจารณาโจทย์ข้ออื่นๆเรื่องการหมุนในระนาบ จึงจะกล่าวโดยละเอียด

รูป ต.ย.5.4ก. เป็นรูปฉายของวัตถุ แรงเสียดทาน และแรงปฏิกิริยาตั้งฉาก รูปฉายเช่นนี้นักศึกษาได้เห็นมามากมายตั้งแต่เมื่อครั้งเรียนมัธยม สังเกตว่าความเร็วเชิงมุมตั้งฉากกับระนาบของกระดาษเหมือนกับรูปฉายของโจทย์ข้ออื่นๆที่นักศึกษาเคยทำ ความจริงแล้วทั้งแรงเสียดทานและแรงปฏิกิริยาตั้งฉากกระจายตามผิวสัมผัสระหว่างทรงกระบอกกับพื้นเอียง คือกระจายในแนวตั้งฉากกับกระดาษ แต่เราเขียนเป็น f แรงเดียว และ N แรงเดียวบนกระดาษ น้ำหนัก Mg ซึ่งคิดได้คล้ายกับว่ากระทำที่จุดศูนย์กลางมวลก็ถูกเขียนลงบนกระดาษ ณ เวลาหนึ่ง จุด A เป็นจุดที่ติดกับผิวทรงกระบอก ที่ตำแหน่งครึ่งหนึ่งของความสูงทรงกระบอก จุดศูนย์กลางมวลก็อยู่ที่ความสูงครึ่งหนึ่งของทรงกระบอกเช่นกัน เราฉาย(project) ทั้งแรงทั้งจุดลงบนกระดาษ ทั้งนี้เพราะรูปฉายบนกระดาษเหมาะในการคำนวณองค์ประกอบของทอร์กในแนวของความเร็วเชิงมุม(แนวแกน z) ดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2.2.2.1 ซึ่งเป็นองค์ประกอบที่ตรงประเด็นกับปัญหาอย่างง่ายในระดับมัธยมและฟิสิกส์ทั่วไป1

<u>วิธีที่ 1</u> จะใช้สมการ $\tau = I\alpha$ หาความเร่งเชิงมุม จุดอ้างอิงเป็นจุดที่ติดไปกับวัตถุ

1.1)ใช้จุดศูนย์กลางมวลเป็นจุดอ้างอิง $\because \tau_{CM} = I_{CM}\alpha$

$$fR = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha \qquad (1)$$

สมการ 1 มีตัวไม่รู้ค่าสองตัวคือ f และ α จำนวนสมการยังไม่พอ นักศึกษาควรระลึกว่าการกลิ้งโดยไม่ไถลแรงเสียดทานเป็นแรงเสียดทานสถิต ดังนั้นจะเขียนว่า ใช้ $f = \mu_s N$ ไม่ได้เพราะ $f_s \le \mu_s N$

ดูในแนวพื้นเอียง $Mg\sin\theta - f = Ma_{CM}$ (2)

สำหรับการกลิ้งโดยไม่ไถล $a_{CM} = \alpha R$ (3)

จากสมการ 1ถึง 3 จะได้ $a_{CM} = \frac{2}{3} g \sin\theta$

1.2)ใช้จุด A บนผิวของทรงกระบอก ณ ตำแหน่งที่ทรงกระบอกแตะพื้น เป็นจุดอ้างอิง

ขอกล่าวอีกว่าจุด A ในรูป ต.ย.5.4 นั้น ความจริงแล้วเป็นจุดที่อยู่กึ่งกลางของความสูงของทรงกระบอก เมื่อทรงกระบอกกลิ้งโดยไม่ไถลจุด A อยู่นิ่งชั่วขณะแต่มีความเร่งในทิศที่พุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางมวล เราจึงใช้เป็นจุดอ้างอิงได้ เมื่อเราใช้จุด A เป็นจุดอ้างอิงทอร์กของ f และ N เป็นศูนย์ มีเฉพาะทอร์กของ Mg ซึ่งจะได้ว่า

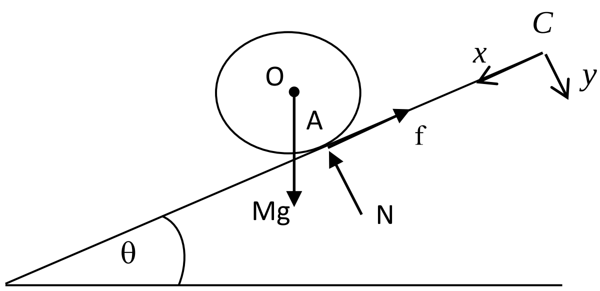
$$M g R \sin\theta = I_A \alpha = \left(\frac{1}{2} MR^2 + MR^2 \right) \alpha \qquad (4)$$

ความเร่งเชิงมุมในสมการ 4 เป็นค่าเดียวกับในสมการ 1 ดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 1.2.2

จากสมการ 3 และ 4 จะได้ $a_{CM} = \frac{2}{3} g \sin\theta$ เท่ากันกับข้อ ก. แต่เราใช้จำนวนสมการน้อยกว่า

วิธีที่ 2 .ใช้จุดตรึงบนพื้นเอียงเป็นจุดอ้างอิง

เลือกจุดตรึงอยู่ตรงไหนก็ได้ เราจะเลือกให้อยู่บนพื้นเอียง คือจุด C ดังในรูป ต.ย.5.4ข. ให้จุดนี้เป็นจุดกำเนิดของพิกัดฉาก แกน x ชี้ลงตามพื้นเอียง แกน y ชี้ลงตั้งฉากกับพื้นเอียง



รูป ต.ย.5.4ข. แกน z พุ่งออกจากกระดาษ

ทอร์กของ f อ้างอิงกับจุด C เป็นศูนย์ เพราะแนวแรงผ่านจุดอ้างอิง จึงมีแต่ทอร์กของ Mg และ N

โดย $\vec{\tau}_{Mg} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{g} = \left(x_{CM}\hat{i} - R\hat{j}\right) \times (Mg\sin\theta\hat{i} + Mg\cos\theta\hat{j}) = (x_{CM}Mg\cos\theta + RMg\sin\theta)\hat{k}$

และ $\vec{\tau}_N = x_N\hat{i} \times N(-\hat{j}) = x_N N(-\hat{k})$

เนื่องจากความเร่งของ CM ทรงกระบอกในแนว y เป็นศูนย์ ดังนั้น $Mg\cos\theta = N$

และจากรูป ต.ย.5.4ข. จะเห็นว่า $x_{CM} = x_N$ จึงได้ว่า

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{Mg} + \vec{\tau}_N = RMg\sin\theta\,\hat{k} \qquad (5)$$

$$\because \quad \vec{L} = \vec{L}_{orbit} + \vec{L}_{spin} = \vec{r}_{CM} \times M\,\vec{v}_{CM} + I_{CM}\,\omega\,\hat{k}$$

$$= (x_{CM}\,\hat{i} - R\,\hat{j}) \times M v_{CM}\,\hat{i} + I_{CM}\,\omega\,\hat{k} = (RMv_{CM} + I_{CM}\,\omega)\,\hat{k}$$

$$\therefore \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = (RM\,a_{CM} + I_{CM}\,\alpha)\,\hat{k}$$

จาก $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \rightarrow RMg\sin\theta\,\hat{k} = (RM\,a_{CM} + I_{CM}\,\alpha)\,\hat{k}$ (6)

แต่ $I_{CM} = \dfrac{1}{2}MR^2$ และ $\alpha = \dfrac{a_{CM}}{R}$

แทนในสมการ 6 จะได้ $a_{CM} = \dfrac{2}{3}g\sin\theta$

เมื่อได้ a_{CM} แล้ว เนื่องจาก a_{CM} คงที่เราจึงใช้สมการสำหรับการเคลื่อนที่แนวตรงด้วยความเร่งคงที่ได้

จาก $v^2 = u^2 + 2aS \rightarrow v^2 = 0 + 2\left(\dfrac{2}{3}g\sin\theta\right)\dfrac{h}{\sin\theta}$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$ <u>คำตอบข้อ ก.</u>

จาก $S = ut + \dfrac{1}{2}at^2 \rightarrow \dfrac{h}{\sin\theta} = 0 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}g\sin\theta\right)t^2$

$$t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{3h}{g}}$$ <u>คำตอบข้อ ข.</u>

<u>หมายเหตุ</u> ถ้านักศึกษาเลือกจุดตรึง C บนพื้นเอียงให้ทับกับจุด A จะสะดวกกว่านี้ ในตัวอย่างนี้เลือกจุด C แบบนี้เพื่อให้เห็นแนวทางในการคำนวณ

<u>วิธีที่ 3</u> จะใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานกล

การจะใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานกลนั้นเราต้องมองให้ออกว่าพลังงานกลของระบบคงที่ พลังงานกลของระบบจะคงที่ถ้าระบบไม่มีการรับงานหรือทำงานจากแรงไม่อนุรักษ์ และไม่มีการเปลี่ยนพลังงานกลไปเป็นพลังงานรูปอื่น หรือเปลี่ยนพลังงานรูปอื่นไปเป็นพลังงานกล การเปลี่ยนพลังงานกลไปเป็นพลังงานรูปอื่นทำให้เกิดการสูญเสียพลังงานกล ช่องทางที่ทำให้เกิดการสูญเสียพลังงานกลเช่น การเสียดสี (ไถล)ระหว่างผิวฝืด การชนกัน การกระตุก

ระลึกว่าแรงต้องเคลื่อนที่จึงจะมีงาน มีสถานการณ์มากมายที่มีแรงแต่ไม่มีงาน ตัวอย่างเช่นลูกบอลตกกระทบพื้นแล้วกระเด้งขึ้น พื้นออกแรงกระทำต่อลูกบอลแต่พื้นไม่ได้ทำงาน เพราะพื้นไม่ได้เคลื่อนที่ คือแรงที่พื้นทำไม่ได้ติดไปกับลูกบอล งานจึงเป็นศูนย์ ถ้าดูพื้นเอียงในรูป ต.ย.5.4 พื้นเอียงอยู่นิ่งๆไม่ได้ขยับ ดังนั้นพื้นเอียงไม่ได้ทำงาน(หรือรับงาน) ให้(หรือจาก)ทรงกระบอก ผิวทรงกระบอกในตำแหน่งที่แตะพื้นเอียงนั้นอยู่นิ่ง(ชั่วขณะ)เมื่อเทียบกับพื้นเอียง ไม่ได้มีการเสียดสี อุณหภูมิของทรงกระบอกและพื้นเอียงก็เท่าเดิม ไม่มีการสูญเสียพลังงานกล แม้จะมีงานของแรงโน้มถ่วงแต่แรงโน้มถ่วงเป็นแรงอนุรักษ์ งานของมันเราคิดในรูปของพลังงานศักย์โน้มถ่วง ดังนั้นพลังงานกลของทรงกระบอกจึงคงที่

งานที่มักสร้างความสับสนให้กับนักศึกษาในตัวอย่างนี้คืองานเนื่องจากแรงเสียดทานสถิต เราอาจมองว่าแรงเสียดทานกระทำต่อทรงกระบอก ณ ตำแหน่งที่ทรงกระบอกแตะพื้นซึ่งเป็นตำแหน่งที่อยู่นิ่ง (ชั่วขณะ) ดังนั้นงานของแรงเสียดทานจึงเป็นศูนย์ หรือเราอาจมองจาก $\Delta E_k = W_{CM}^{trans} + W_{CM}^{rot}$ จะพบว่าในกรณีที่ทรงกระบอกกลิ้งโดยไม่ไถลนี้ W_{CM}^{trans} ของแรงเสียดทาน f คือ $-fS$ เมื่อ S คือระยะทางตามพื้นเอียงที่จุดศูนย์กลางมวลเคลื่อนที่ ส่วน W_{CM}^{rot} ของแรงเสียดทาน f คือ $+fR\theta = +fR\dfrac{S}{R} = +fS$ ดังนั้น $W_{CM}^{trans} + W_{CM}^{rot}$ ของแรงเสียดทานจึงเป็นศูนย์ คือแรงเสียดทานไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของทรงกระบอก

หลังจากที่วิเคราะห์ได้แล้วว่าพลังงานกลของทรงกระบอกคงที่ขั้นต่อไปก็เป็นการคำนวณ

ให้ระดับสูง h เป็นระดับอ้างอิงพลังงานศักย์โน้มถ่วง เมื่อเริ่มต้นทรงกระบอกอยู่นิ่งพลังงานจลน์เป็นศูนย์ พลังงานศักย์ก็เป็นศูนย์ ดังนั้น

$$0 = E_p + E_k = -Mgh + \left\{ \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2 \right\}$$

ในกรณีการกลิ้งโดยไม่ไถล $v_{CM} = \omega R$ และ $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ ดังนั้น

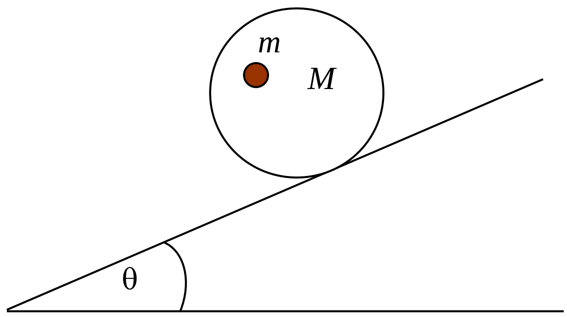
$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$ <u>คำตอบข้อ ก.</u>

จาก $$S = \frac{u+v}{2}t \rightarrow \frac{h}{\sin\theta} = \frac{0+\sqrt{\frac{4}{3}gh}}{2}\ t$$

$$t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{3h}{g}}$$ <u>คำตอบข้อ ข.</u>

ตัวอย่างที่ 5.5 ทรงกระบอกไม่สม่ำเสมอ

ทรงกระบอกมวล M มีมวล m ยึดอยู่ในทรงกระบอก กลิ้งโดยไม่ไถลลงมาจากพื้นเอียงดังรูป ต.ย.5.5 จุด A เป็นจุดบนทรงกระบอกขณะที่ทรงกระบอกแตะพื้น เหมือนกับตัวอย่างที่ 5.4



รูป ต.ย.5.5

ความเร่งของจุด A ยังคงพุ่งเข้าไปจุดกึ่งกลางทรงกระบอก (จุด O)เหมือนกับตัวอย่างที่ 5.4

แต่จุด O ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวลแล้ว จึงใช้จุด A เป็นจุดอ้างอิงของสมการ $\tau = I\alpha$ ไม่ได้ ใช้ได้เพียงจุดศูนย์กลางมวล

ถ้ามวล m มีค่ามากพอ เมื่อทรงกระบอกกลิ้งลงมาด้วยความเร็วมากๆ ทรงกระบอกจะกระเด็นหลุดจากพื้นเอียง แต่ปัญหานี้เราไม่สนใจในระดับมัธยมหรือฟิสิกส์ทั่วไป1 เราสนใจเพียงทรงกระบอกสม่ำเสมอซึ่งจะกลิ้งลงมาเรื่อยๆ โดยไม่กระเด็นหลุดจากพื้นเอียง

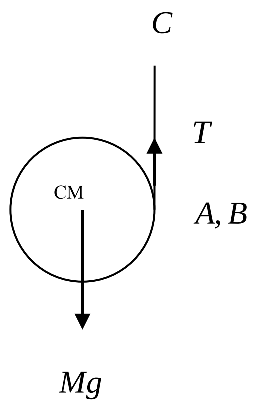
ตัวอย่างที่ 5.6 โยโย่

โยโย่ทำจากทรงกระบอกรัศมี R พันด้วยเชือกหลายๆรอบ เดิมโยโย่อยู่สูงจากพื้น h จับปลายเชือก C ไว้นิ่ง แล้วปล่อยให้โย่โย่หมุนลงมาโดยไม่มีการส่าย(คือเป็นการหมุนในระนาบ) $(I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2)$

ก) เมื่อโยโย่ถึงพื้น ความเร็วของ CM ของโยโย่มีความเร็วเท่าใด

ข) ใช้เวลาเท่าใดโยโย่จึงจะถึงพื้น

ค) ขณะโยโย่กำลังจะถึงพื้นพลังงานจลน์ของโยโย่เป็นเท่าใด



รูป ต.ย.5.6 จับปลายเชือก C ไว้นิ่ง A เป็นจุดบนทรงกระบอก B เป็นจุดบนเชือก
จุด A และ B แตะกัน. ทิศของความเร็วเชิงมุมพุ่งออกจากกระดาษ

วิธีทำ ไม่ว่าจะจับปลาย C ไว้นิ่ง หรือดึงขึ้น หรือหย่อนลง จุด B ซึ่งเป็นจุดบนเชือก ณ ตำแหน่งที่แตะกับทรงกระบอกจะมีความเร็วและความเร่งเท่ากับจุด C และจะมีเฉพาะความเร็วและความเร่งในแนวดิ่งเท่านั้น

จุด A เป็นจุดบนทรงกระบอก ณ ตำแหน่งที่แตะกับเชือก คือแตะกับจุด B ความเร็วและความเร่งในแนวดิ่งของจุด A จะเท่ากับของจุด B แต่เนื่องจากจุด A เคลื่อนที่แบบวงกลม มันจึงมีความเร่งขนาด $\omega^2 R$ ในทิศพุ่งเข้าหา CM เพิ่มมาอีก

ในขณะที่โยโย่ม้วนลงนี้ ไม่ว่าจะจับปลายเชือกนิ่ง หรือดึง หรือหย่อนปลายเชือก (เชือกยังตึง ไม่ใช่หย่อนจนเชือกไม่ตึง) ความเร็วและความเร่งของ CM *ในแนวดิ่ง* เทียบกับจุด A (ก็คือเทียบกับจุดB และ C ด้วย) จะมีทิศลงเสมอ โดยมีขนาดเป็น ωR และ αR ตามลำดับ

วิธีที่ 1 จะหาความเร่งของ CM ก่อน โดยใช้ทอร์ก

1.1)ใช้ CM เป็นจุดอ้างอิง

$$\because \tau = I\ \alpha \rightarrow T R = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha \qquad (1.1)$$

ดูการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่บ้าง CM มีความเร่ง αR ทิศลง เทียบกับผู้สังเกตบนกรอบอ้างอิงเฉื่อย

ดังนั้น $M g - T = M\alpha R$ (1.2)

จาก 1.1 และ 1.2 จะได้ $\alpha = \frac{2g}{3R}$

1.2) จะใช้จุด A เป็นจุดอ้างอิง สำหรับสมการ $\tau = I\alpha$ เนื่องจากจุด A เป็นจุดที่ติดไปกับวัตถุและมีความเร่งพุ่งเข้าหา CM จึงใช้เป็นจุดอ้างอิงได้

$$\tau = I\ \alpha \rightarrow MgR = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)\alpha \rightarrow \alpha = \frac{2g}{3R}$$ เช่นเดียวกับ วิธี 1.1

ดังนั้น $a_{CM} = \alpha R = \frac{2}{3}g$

จาก $v^2 = u^2 + 2aS \rightarrow v^2 = 0 + 2\left(\frac{2}{3}g\right)h$

$$\therefore \quad v_{CM} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$ คำตอบข้อก.

จาก $S = ut + \frac{1}{2}a t^2 \rightarrow h = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}g\right)t^2$

$$t = \sqrt{\frac{3h}{g}}$$ คำตอบข้อ ข.

พลังงานศักย์ลดลง Mgh กลายไปเป็นพลังงานจลน์ ดังนั้นพลังงานจลน์เท่ากับ Mgh คำตอบข้อ ค.

วิธีที่ 2 จะใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานกล

เรามองทรงกระบอกรวมทั้งเชือก(รวมกันคือโยโย่)เป็นระบบ มือจับปลายเชือกไว้นิ่งดังนั้นมือไม่ทำงานและก็ไม่รับงาน (แรงจากมือเรามองว่าไม่ใช่แรงอนุรักษ์) แม้จะมีงานของแรงโน้มถ่วงแต่แรงโน้ม

ถ่วงเป็นแรงอนุรักษ์ งานของมันเราคิดในรูปของพลังงานศักย์โน้มถ่วง ไม่มีการเปลี่ยนรูปพลังงานกลไปเป็นพลังงานรูปอื่นหรือพลังงานรูปอื่นเป็นพลังงานกล เพราะไม่มีการไถลระหว่างผิวฝืด ไม่มีการชน ไม่มีการกระตุก พลังงานกลของโยโย่จึงคงที่

ให้ระดับของโยโย่เมื่อเริ่มต้นเป็นระดับอ้างอิงพลังงานศักย์โน้มถ่วง เดิมโยโย่อยู่นิ่งพลังงานกลจึงเป็นศูนย์ ซึ่งเท่ากับพลังงานกลเมื่อจะกระทบพื้น คือ

$$0 = -Mgh + \frac{1}{2}M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2$$

เมื่อแทน $\omega = \dfrac{v_{CM}}{R}$ และ $I_{CM} = \dfrac{1}{2}MR^2$ ลงไปจะได้

$$v_{CM} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$ <u>คำตอบข้อก.</u>

เนื่องจากความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลคงที่

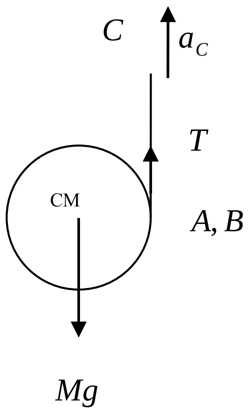
จาก $S = \dfrac{u+v}{2}t \rightarrow h = \dfrac{0+\sqrt{\frac{4}{3}gh}}{2}\, t \rightarrow t = \sqrt{\dfrac{3h}{g}}$ <u>คำตอบข้อข.</u>

ตัวอย่างที่ 5.7 โยโย่ อีก

เดิมโยโย่ในตัวอย่างที่ 5.6 อยู่นิ่ง จากนั้นดึงปลายเชือกของโยโย่ขึ้นด้วยความเร่ง a_C ทำให้โยโย่หมุนลงมาเรื่อยๆ ในช่วงเวลา t วินาที นับจากเริ่มดึงปลายเชือก

ก)งานของมือเป็นเท่าใด ข)พลังงานศักย์โน้มถ่วงของโยโย่เปลี่ยนไปเท่าใด

ค)พลังงานจลน์ของโยโย่เพิ่มขึ้นเป็นเท่าใด ง)งานของมือเท่ากับพลังงานกลของโยโย่ที่เปลี่ยนไปหรือไม่



รูป ต.ย.5.7ก. ดึงปลายเชือก C ขึ้นด้วยความเร่ง a_C

<u>วิธีทำ</u> วิธีที่ 1 จะหา α ก่อนโดยใช้จุดอ้างอิงต่างกัน 2 จุด

1.1)ใช้ CM เป็นจุดอ้างอิง (แน่นอน ใช้ได้อยู่แล้ว)

$$\because \tau = I\ \alpha \rightarrow T R = \left(\frac{1}{2} MR^2\right)\alpha \qquad (1.1)$$

ดูการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่บ้าง CM มีความเร่ง αR ทิศลง เทียบกับจุด B (หรือ C) แต่จุด C แต่จุด C มีความเร่ง a_C ทิศขึ้น ดังนั้นผู้สังเกตบนกรอบอ้างอิงเฉื่อยจะเห็น CM มีความเร่ง $a_C - \alpha R$ ทิศขึ้น หรืออาจเขียนเป็น $\alpha R - a_C$ ทิศลง

ให้ทิศขึ้นเป็นบวก $T - Mg = M(a_C - \alpha R)$ (1.2)

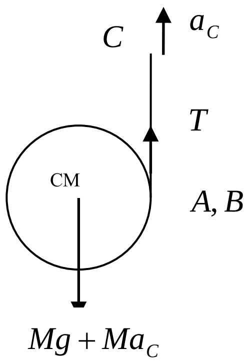
ถ้าให้ทิศลงเป็นบวก สมการจะเป็น $Mg - T = M(\alpha R - a_C)$

จาก 1.1 และ 1.2 จะได้ $\alpha = \dfrac{2}{3R}\left(a_C + g\right)$

1.2) ทบทวนอีกครั้งว่า จุด A เป็นจุดบนทรงกระบอก ณ ตำแหน่งที่แตะกับเชือก จุด B คือจุดบนเชือก ณ ตำแหน่งที่แตะกับทรงกระบอก จุด C คือจุดที่ปลายเชือก จุด B และ C มีความเร่งในแนวดิ่งเท่ากันแต่ไม่มีความเร่งในแนวระดับ ความเร่ง<u>ในแนวดิ่ง</u>ของจุด A และจุด B เท่ากัน แต่จุด A มีความเร่งในแนวระดับ ขณะที่จุด B ไม่มี ความเร่งของ CM ของโยโย่เทียบกับจุด A เท่ากับ αR ทิศลง

การใช้จุด A เป็นจุดอ้างอิงนั้น ปกติแล้วเราไม่ทำเช่นนี้ เพราะจุด A มีความเร่งและแนวของความเร่งไม่ผ่าน CM โดยจุด A มีความเร่งในแนวระดับทิศพุ่งเข้าหา CM และมีความเร่งในแนวดิ่งเท่ากับ

จุด B (และ C) คือเท่ากับ a_C ทิศขึ้น   ในการหาทอร์กเทียมเราใส่แรงเทียม $-M\,\bar{a}_A$ ที่ CM เฉพาะองค์ประกอบของแรงเทียมในแนวดิ่งเท่านั้น เพราะองค์ประกอบของแรงเทียมในแนวระดับมีทิศผ่านจุด A ทอร์กรอบจุด A จึงเป็นศูนย์   แรงเทียมในแนวดิ่งคือ $M\,a_C$ ทิศชี้ลงเสริมกับ $M\,g$ ที่ CM ดังแสดงในรูป ต.ย.5.7ข.



รูป ต.ย.5.7ข. ใส่แรงเทียม $M\,a_C$ ทิศชี้ลง ที่ CM เพื่อจะใช้จุด A เป็นจุดอ้างอิง

ใช้ A เป็นจุดอ้างอิง ทอร์กของ T เป็นศูนย์ มีแต่ทอร์กของ $M\,\bar{g}$ และทอร์กเทียมของ $-M\,\bar{a}_C$ ทอร์กทั้งคู่เสริมกัน ดังนั้น $(Mg + Ma_C) = I_A\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)\alpha$

จะได้ $\alpha = \frac{2}{3R}(a_C + g)$ เท่ากับวิธี1.1 แต่ใช้เพียงสมการเดียวก็ได้คำตอบ

แทน α ลงในสมการ 1.1 จะได้ $T = \frac{1}{2}MR\alpha = \frac{M}{3}(a_C + g)$ (1.3)

ในเวลา t วินาที มือเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $S_C = 0 + \frac{1}{2}a_C t^2 = \frac{1}{2}a_C t^2$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สาม แรงที่มือดึงเชือกเท่ากับแรงที่เชือกดึงมือ แต่เชือกดึงมือเท่ากับแรงตึงเชือก

ดังนั้นงานของมือ = $TS_C = \frac{M}{3}(a_C + g)\left(\frac{1}{2}a_C t^2\right) = \frac{1}{6}Ma_C t^2(a_C + g)$ <u>คำตอบข้อ ก.</u>

เนื่องจาก $a_{CM} = \alpha R - a_C$ จะได้

$a_{CM} = \frac{2}{3}(a_C + g) - a_C = \frac{2g - a_C}{3}$ ทิศลง   (1.4)

ในเวลา t วินาที CM เคลื่อนที่ลงเป็นระยะทาง $S_{CM} = \frac{1}{2}\left(\frac{2g-a_c}{3}\right)t^2$

$\therefore$ พลังงานศักย์โน้มถ่วงลดลง $\frac{1}{2}Mg\left(\frac{2g-a_c}{3}\right)t^2$

หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $\Delta E_p = -\frac{1}{6}Mgt^2\,(2g-a_C)$ (1.5) <u>คำตอบข้อ ข.</u>

ในเวลา t วินาที ความเร็วของศูนย์กลางมวล $v_{CM} = \frac{(2g-a_C)}{3}t$ (1.6)

ในเวลา t วินาที ความเร็วเชิงมุมของโยโย่ $\omega = \alpha t = \frac{2}{3R}\left(a_C+g\right)t$ (1.7)

$\because$ พลังงานจลน์ของโยโย่ $E_k = \frac{1}{2}M\,v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\,\omega^2$

แทน สมการ (1.6) (1.7) และ $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ ลงไป ได้

$$E_k = \frac{1}{6}M\,t^2(2g^2+a_C^2)$$

เนื่องจากเดิมพลังงานจลน์เป็นศูนย์ ดังนั้น $\Delta E_k = \frac{1}{6}M\,t^2(2g^2+a_C^2)$ (1.8) <u>คำตอบข้อ ค.</u>

พลังงานกลที่เปลี่ยนไป $\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_k = -\frac{1}{6}Mgt^2(2g-a_C) + \frac{1}{6}M\,t^2(2g^2+a_C^2)$

$$\Delta E = \frac{1}{6}Ma_Ct^2(a_C+g) \qquad (1.9)$$

จะเห็นว่าเท่ากับงานของมือ ก็คือมือให้งานแก่โยโย่ทำให้โยโย่มีพลังงานกลเพิ่มขึ้นเท่ากับงานที่ได้รับ

<u>คำตอบข้อง.</u>

เพื่อให้นักศึกษาเข้าใจสมการ $W_{CM}^{trans} + W_{CM}^{rot} = \Delta E_k$ ในหัวข้อ3.3 เราจะคำนวณ ΔE_k ด้วยสมการนี้ แรงที่ทำต่อโยโย่มี T ทิศขึ้น และ Mg ทิศลง

ในเวลา t วินาที CM เคลื่อนที่ลงเป็นระยะทาง $S_{CM} = \frac{1}{2}\left(\frac{2g-a_c}{3}\right)t^2$

$$\therefore\ W_{CM}^{trans} = (Mg - T)\left(\frac{1}{6}t^2(2g - a_C)\right) = \left(Mg - \frac{M}{3}(a_C + g)\right)\left(\frac{1}{6}t^2(2g - a_C)\right)$$

$$W_{CM}^{trans} = \frac{M}{18}(2g - a)^2 t^2 \qquad (1.10)$$

(แม้ Mg จะเคลื่อนที่ลงเป็นระยะ S_{CM} แต่ T เคลื่อนที่เท่ากับ $S_C = \frac{1}{2}a_C t^2$ นักศึกษาจะเห็นอย่างชัดเจนว่า W_{CM}^{trans} จึงไม่ใช่งานจริงๆ มันเป็นเพียงพจน์ที่คล้ายกับงานเท่านั้น)

แรงที่ทำให้ให้เกิดทอร์กรอบ CM คือ T โดย มุม $\theta = \theta_f - \theta_i$ ที่โยโย่หมุนนับจากเริ่มต้น หาได้จาก $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow \theta = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3R}(a_c + g)\right)t^2 = \frac{1}{3R}(a_C + g)t^2$

{หรือมองเป็น $\theta = \frac{S_C + S_{CM}}{R}$ ก็ได้เช่นกัน}

$$W_{CM}^{rot} = \int_i^f \tau_{CM}\ d\theta = \int_i^f TRd\theta = TR[\theta]_i^f = \frac{1}{3}T(a_C + g)t^2$$

แทนค่า T จากสมการ 1.3 ลงไปได้ $W_{CM}^{rot} = \frac{M}{3}(a_C + g)\left(\frac{1}{3}(a_C + g)t^2\right)$

คือ $$W_{CM}^{rot} = \frac{M}{9}(a_C + g)^2 t^2 \qquad (1.11)$$

สมการ 1.10 + 1.11 ควรจะได้เท่ากับ ΔE_k

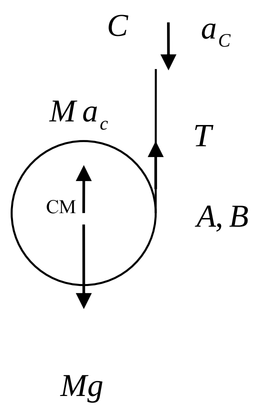
$$W_{CM}^{trans} + W_{CM}^{rot} = \frac{M}{18}(2g - a)^2 t^2 + \frac{M}{9}(a_C + g)^2 t^2$$

$$= \frac{1}{6}M\,t^2(2g^2 + a_C^2)$$

ซึ่งจะเห็นว่าเท่ากับ ΔE_k ในสมการ 1.8 แต่เราไม่นิยมที่จะคำนวณ ΔE_k จาก $W_{CM}^{trans} + W_{CM}^{rot}$ เรานิยมหาจาก $\Delta E_k = \Delta\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \Delta\frac{1}{2}I_{CM}\,\omega^2$

ตัวอย่างที่ 5.8 โยโย่ อีก

หย่อนปลายเชือกของโยโย่ในตัวอย่างที่ 5.6 ลงด้วยความเร่ง a_C ที่ไม่มากนัก ทำให้เชือกยังตึง เราจะหาความเร่งเชิงมุม โดยใช้จุด A เป็นจุดอ้างอิง คราวนี้แรงเทียม Ma_C มีทิศชี้ขึ้นในแนวดิ่ง ดังรูปรูป ต.ย.5.8



รูป ต.ย.5.8 ใส่แรงเทียม $M a_C$ ทิศชี้ขึ้น ที่ CM เพื่อจะใช้จุด A เป็นจุดอ้างอิง

ใช้ A เป็นจุดอ้างอิง ทอร์กของ T เป็นศูนย์ มีแต่ทอร์กของ $M\vec{g}$ และทอร์กเทียมของ $-M\vec{a}_C$

ดังนั้น $(Mg - Ma_C) = I_A\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)\alpha$

จะได้ $$\alpha = \frac{2}{3R}\left(g - a_C\right)$$

โดยความเร่งของ CM $a_{CM} = \alpha R + a_C$ ทิศชี้ลง

เราอาจคำนวณหาสิ่งที่เราอยากรู้ได้คล้ายๆกับตัวอย่างที่ 5.7 นักศึกษาลองคำนวณดูจะเห็นว่างานของมือติดลบ คือมือไม่ได้ให้งานแก่โยโย่แต่กลับรับงานจากโยโย่ โดยขนาดของงานที่รับเท่ากับพลังงานกลของโยโย่ที่ลดลง

ตัวอย่างที่ 5.9 มวลและรอก

รอกมวล 2 กิโลกรัม มีเชือกเบาคล้องผ่านรอก โดยเชือกห้อยมวล 3 กิโลกรัม และ 1 กิโลกรัม (ใช้มือ)ดึงก้านรอกขึ้นด้วยความเร่ง 1 เมตรต่อวินาที^{2} ดังรูป ต.ย.5.9ก. ถ้ารอกหมุนได้คล่องและไม่มีการไถลระหว่างเชือกกับผิวรอก $(I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2)$

ก) แรงตึงของเชือกแต่ละด้านเป็นกี่นิวตัน

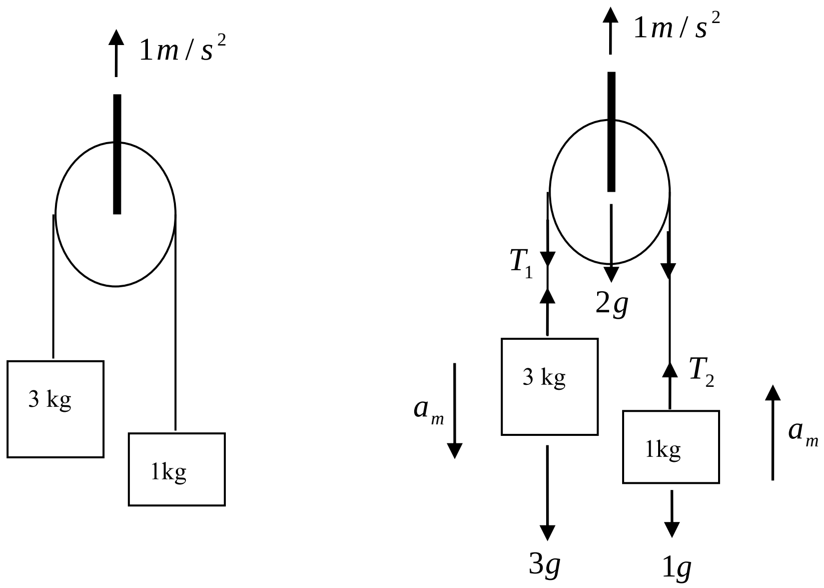
ข) มือออกแรงดึงรอกกี่นิวตัน

ค) ความเร่งของมวลแต่ละก้อนเป็นเท่าใด เมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย

ง) จุดศูนย์กลางมวลของระบบที่ประกอบด้วยรอก เชือกและมวลทั้งสองก้อน มีความเร่งเท่าใด

จ) ถ้าเมื่อเริ่มต้นรอกและมวลอยู่นิ่ง เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที งานของมือเป็นเท่าใด

ฉ) เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที พลังงานกลของระบบที่ประกอบด้วยรอกและมวลทั้งสองนี้ เพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่าใด



รูป ต.ย.5.9ก.

ข.

<u>วิธีทำ</u> การที่ไม่มีการไถลระหว่างเชือกกับผิวรอกแสดงว่ารอกเป็นรอกผิวฝืด แม้ว่าเชือกจะเป็นเชือกเส้นเดียวกันและเป็นเชือกเบา แต่เมื่อพาดผ่านผิวฝืดแรงตึงเชือกทั้งสองด้านก็ไม่เท่ากัน

เนื่องจากมวล 3 กิโลกรัม และ 1 กิโลกรัมคล้องด้วยเชือก ขนาดของความเร่งของมวลทั้งสองสัมพัทธ์กับรอกจึงเท่ากัน แต่ทิศจะสวนทางกัน ให้ a_m คือขนาดของความเร่งของมวลแต่ละก้อน<u>สัมพัทธ์กับรอก</u>

เทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย ความเร่งของมวล 2 กิโลกรัม = $1-a_m \quad m/s^2$ ทิศชี้ขึ้น

(เพราะเราตั้ง $1 \quad m/s^2$ ซึ่งมีทิศชี้ขึ้น ลบด้วย a_m ซึ่งมีทิศชี้ลง)

และความเร่งของมวล 1 กิโลกรัม = $1+a_m \quad m/s^2$ ทิศชี้ขึ้น

ดูมวล 3 กิโลกรัม $T_1 - 3(9.8) = 3(1 - a_m)$ (1)

ดูมวล 1 กิโลกรัม $T_2 - 1(9.8) = 1(1 + a_m)$ (2)

ดูรอก $(T_1 - T_2)R = I_{CM}\alpha = \frac{1}{2}(2)R^2\alpha$ (3)

แต่ $\alpha = \frac{a_m}{R}$ ดังนั้น $(T_1 - T_2) = a_m$ (3)

สมการ 1,2 และ 4 เป็นสมการเชิงเส้น 3 สมการ มีตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว แก้สมการออกมาได้

$a_m = 4.32$ เมตรต่อวินาที^{2}

$T_1 = 19.44$ นิวตัน $T_2 = 15.12$ นิวตัน คำตอบข้อก.

ให้ F เป็นแรงที่มือดึงรอก ดูรอกเป็นระบบ ดูในแนวดิ่ง

$$F \; -(2kg)(9.8m/s^2) - (19.44N) - (15.12N) = (2kg)(1m/s^2)$$

$F = 56.16$ นิวตัน คำตอบข้อ ข.

ความเร่งเมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อยของมวล 3 กิโลกรัม คือ 3.32 เมตรต่อวินาที^{2} ทิศชี้ลง

ของมวล 1 กิโลกรัม คือ 5.32 เมตรต่อวินาที^{2} ทิศชี้ขึ้น คำตอบข้อ ค.

นักศึกษาคงจำได้ว่านิยามของจุดศูนย์กลางมวล กรณีระบบมีมวล 3 ก้อนคือ

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาสองครั้ง จะได้

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

ดังนั้น $a_{CM} = \frac{(2kg)(1m/s^2) + (3kg)(-3.32m/s^2) + (1kg)(5.32m/s^2)}{(2kg) + (3kg) + (1kg)} = -0.44\, m/s^2$

คือมีขนาด 0.44 เมตรต่อวินาที^{2} ทิศชี้ลง คำตอบข้อ ง.

เราจะตรวจคำตอบดูสักหน่อยว่า ดูทั้งระบบเลย จาก $\sum \vec{F}^{ext} = M\,\vec{a}_{CM}$

โดย $\sum \vec{F}^{ext}$ คือแรงลัพธ์ของแรงภายนอกระบบ คราวนี้แรงที่เชือกดึงมวล มวลดึงเชือก เชือกดึงรอก รอกดึงเชือก เป็นแรงภายในระบบ ไม่ต้องนำมาคิด แรงภายนอกระบบมีแต่แรงจากมือและแรงโน้มถ่วง

ดู $\sum \vec{F}^{ext} = (2kg)(9.8m/s^2) + (3kg)(9.8m/s^2) + (1kg)(9.8m/s^2) - (56.16N) = 2.64\,N$ ทิศชี้ลง

ดู $M\,\vec{a}_{CM} = (6kg)(0.44m/s^2) = 2.64\,N$ ทิศชี้ลง เมื่อตรวจแล้วว่าเท่ากันก็อุ่นใจหน่อย

(แต่ก็ไม่แน่ นักศึกษาสามารถเรียนรู้การตรวจสอบแบบนี้ด้วยการลองเขียนสมการที่ผิด เช่นเขียนสมการ 3 เป็น $(T_2 - T_1)R = I_{CM}\,\alpha$ แล้วลองแก้สมการ 1,2 และ 3 หาคำตอบแล้วนำมาตรวจสอบ)

ในเวลา 1 วินาที มือเคลื่อนที่ขึ้นเป็นระยะทาง 0.5 เมตร ดังนั้นงานของมือเท่ากับ

$(56.16N)(0.5m) = 28.08$ จูล <u>คำตอบข้อ จ.</u>

เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที จะหาว่ารอกและมวลทั้งสองก้อน จะอยู่สูงหรือต่ำจากเดิมกี่เมตร โดยดูจาก

$S = u\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$ ซึ่งได้ว่า

รอกสูงจากเดิม 0.5 เมตร มวล 3 กิโลกรัมอยู่ต่ำจากเดิม 1.66 เมตร มวล 1 กิโลกรัมอยู่สูงจากเดิม 2.66 เมตร

ดังนั้นพลังงานศักย์เปลี่ยนไป =

$(2kg)(9.8m/s^2)(0.5m) + (3kg)(9.8m/s^2)(-1.66m) + (1kg)(9.8m/s^2)(2.66m) = -12.936$ จูล

คือพลังงานศักย์ลดลง 12.936 จูล

เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที จะหาว่ารอกและมวลทั้งสองก้อน จะมีอัตราเร็วเท่าใด โดยดูจาก

$v = u + a\,t$ ซึ่งจะได้ว่า

อัตราเร็วของรอก 1 เมตรต่อวินาที ของมวล 3 กิโลกรัมและ 1 กิโลกรัม 3.32 และ 5.32 เมตรต่อวินาที

ความเร็วเชิงมุมของรอกหาจาก $\omega = \omega_0 + \alpha\,t = 0 + \frac{a_m}{R}t = \frac{4.32}{R}$ เรเดียนต่อวินาที

เนื่องจากเดิมรอกอยู่นิ่ง พลังงานจลน์ของรอกเพิ่ม $\frac{1}{2}(2)(1)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2)R^2\right)\left(\frac{4.32}{R}\right)^2=10.3312$ จูล

พลังงานจลน์ของมวล 3 กิโลกรัมเพิ่ม $\frac{1}{2}(3)(3.32)^2=16.5336$ จูล

พลังงานจลน์ของมวล 1 กิโลกรัมเพิ่ม $\frac{1}{2}(1)(5.32)^2=14.1512$ จูล

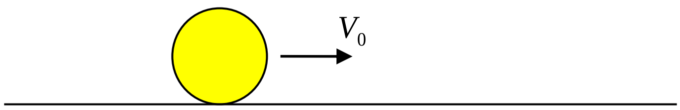
$\therefore$ พลังงานกลเพิ่มขึ้น 10.3312+16.5336+14.1512 – 12.9360 = 28.08 จูล <u>คำตอบข้อ ฉ</u>

พลังงานกลที่เพิ่มขึ้นมาจากงานที่มือทำ

<u>หมายเหตุ</u> ถ้านักศึกษาคำนวณ ΔE_k ของรอกจาก $W_{CM}^{trans}+W_{CM}^{rot}$ ก็จะได้ 10.3312 จูล เช่นกัน

ตัวอย่างที่ 5.10 ทรงกลมไถลบนพื้นราบฝืด

ทรงกลมตันมวล M รัศมี R ถูกกระแทกในแนวระดับผ่านจุดศูนย์กลางมวล ทำให้ทรงกลมเคลื่อนที่ไปบนพื้นระดับด้วยความเร็วเริ่มต้น V_0 ดังรูป ต.ย.5.10ก. กำหนดให้สัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างทรงกลมกับพื้นระดับเป็น μ และทรงกลมมีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล $I_{CM}=\frac{2}{5}MR^2$



รูป ต.ย.5.10ก.

ก) จงหาระยะทางจากจุดตั้งต้นที่ทรงกลมเคลื่อนที่ไปบนพื้นระดับ จนเริ่มกลิ้งโดยไม่ไถล

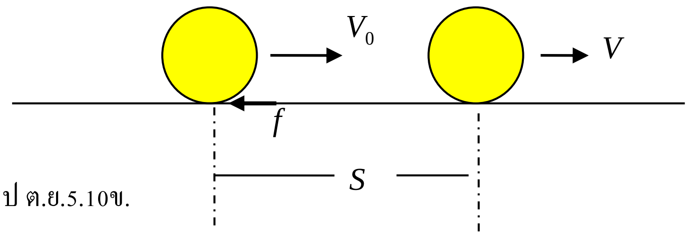
ข) จงหาอัตราเร็วเชิงมุมของทรงกลมขณะที่กลิ้งโดยไม่ไถล

ค) จากเริ่มต้นจนกลิ้งโดยไม่ไถลพลังงานจลน์เปลี่ยนแปลงไปเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> ก่อนอื่นต้องดูให้ออกก่อนว่าเมื่อเริ่มต้นทรงกลมยังไม่หมุน คือความเร็วเชิงมุม $\omega=0$ แต่ CM มีความเร็วเชิงเส้นมากที่สุดคือ V_0

ในขณะที่กำลังไถลแรงเสียดทานจะทำให้ ω มากขึ้นเรื่อยๆ ในขณะที่ ความเร็วเชิงเส้น ของ CM คือ V ลดลงเรื่อยๆ ในช่วงนี้ $V>\omega R$

จนเมื่อ $V=\omega R$ ทรงกลมจะกลิ้งโดยไม่ไถล ดังในรูป ต.ย.5.10ข. แรงเสียดทานจะเป็นศูนย์โดยทันที ในเชิงอุดมคติแล้วทรงกลมจะกลิ้งไปเรื่อยๆด้วยความเร็วคงที่



รูป ต.ย.5.10ข.

ขณะที่กำลังไถลอยู่นั้นแรงในแนวระดับที่กระทำต่อทรงกลมคือแรงเสียดทานจลน์ $f=\mu N=\mu mg$ ทิศไปทางซ้าย

จากกฎข้อที่สองแบบเลื่อนที่ $\mu mg = ma$

ดังนั้น ความเร่ง $a=\mu g$ ทิศไปทางซ้าย

เนื่องจากความเร่งคงที่เราใช้สูตร $v=u+at$ ได้

ให้ทิศไปทางขวาเป็นบวก จะได้ $V(t)=V_0-\mu gt$ (1)

ใช้ CM เป็นจุดอ้างอิง จากกฎข้อที่สองแบบหมุนจะได้ $fR=\mu MgR=I_{CM}\alpha$

จะได้ $\alpha=\dfrac{5\mu g}{2R}$

เนื่องจากความเร่งเชิงมุมคงที่เราใช้สูตร $\omega=\omega_0+\alpha t$ จะได้

$$\omega = 0+\frac{5\mu g}{2R}t \qquad (2)$$

เมื่อไม่ไถล $V=\omega R$ จากสมการ 1 และ 2 จะได้

$$V_0-\mu gt=\left(\frac{5\mu g}{2R}t\right)R$$

$$t=\frac{2V_0}{7\mu g}$$

ระยะทางที่ไถลหาได้จาก $S = V_0 t - \frac{1}{2}at^2 = \frac{12V_0^2}{49\mu g}$ <u>คำตอบข้อก.</u>

ความเร็วเชิงมุมเมื่อไม่ไถลหาได้จาก $\omega = \alpha t = \frac{5V_0}{7R}$ <u>คำตอบข้อ ข.</u>

พลังงานจลน์เมื่อเริ่มต้น $E_{ki} = \frac{1}{2}MV_0^2$

พลังงานจลน์เมื่อไม่ไถล $E_{kf} = \frac{1}{2}M\left(\frac{5}{7}V_0\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{5V_0}{7R}\right)^2 = \frac{5}{14}MV_0^2$

$$\Delta E_k = \frac{5}{14}MV_0^2 - \frac{1}{2}MV_0^2 = -\frac{1}{7}MV_0^2$$ <u>คำตอบข้อค.</u>

<u>หมายเหตุ</u> นักศึกษาอาจคิดว่า $\Delta E_k = -f\,S = -(\mu M g)\left(\frac{12V_0^2}{49\mu g}\right) = -\frac{12}{49}MV_0^2$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

เพราะจริงๆแล้วจากสมการ 3.3.3 $\Delta E_k = W_{CM}^{trans} + W_{CM}^{rot}$

โดย $W_{CM}^{trans} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}_{CM} = -f\,S = -(\mu M g)\left(\frac{12V_0^2}{49\mu g}\right) = -\frac{12}{49}MV_0^2$

$$W_{CM}^{rot} = \int_i^f \tau_{CM}\, d\theta = \int_i^f fRd\theta = \mu M gR[\theta]_i^f$$

มุม $\theta = \theta_f - \theta_i$ ที่ทรงกลมหมุนหาได้จาก $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{5\mu g}{2R}\right)\left(\frac{2V_0}{7\mu g}\right)^2 = \frac{5V_0^2}{49\mu gR}$

$$\therefore W_{CM}^{rot} = \frac{5}{49}MV_0^2$$

$\Delta E_k = W_{CM}^{trans} + W_{CM}^{rot} = -\frac{12}{49}MV_0^2 + \frac{5}{49}MV_0^2 = -\frac{1}{7}MV_0^2$ เท่ากับคำตอบในข้อ ค.

ถ้านักศึกษาพิจารณาการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ที่ใช้งาน-พลังงาน ในกรณีที่มีแรงเสียดทานจลน์ ซึ่งมักกล่าวกันว่างานของแรงเสียดทานจลน์เท่ากับพลังงานจลน์ที่สูญเสียไป ตัวอย่างเช่นกล่องไถลตามพื้นราบฝืด ในการคำนวณมักตั้งสมการให้งานของแรงเสียดทานจลน์เท่ากับพลังงานจลน์ที่สูญเสียไปซึ่งได้คำตอบที่ถูกต้องออกมา สาเหตุที่ถูกเพราะกล่องไม่มีการหมุน พจน์ $W_{CM}^{rot} = 0$ ส่วนพจน์ W_{CM}^{trans} คือพจน์ที่เรียกกันว่างานของแรงเสียดทานจลน์ ดังนั้น ΔE_k จึงเท่ากับ “งานของแรงเสียดทานจลน์” ซึ่ง

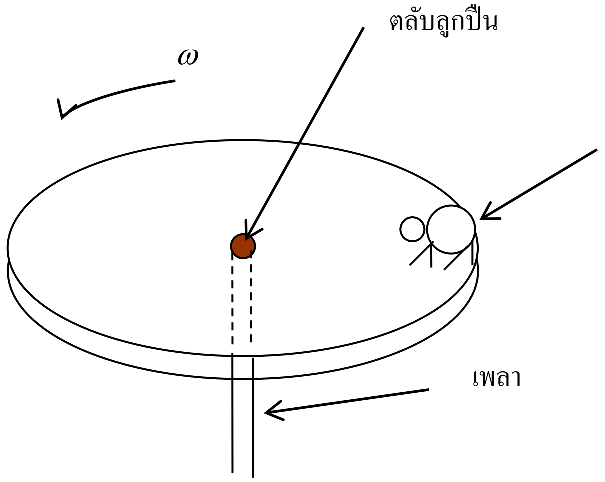
จริงๆแล้ว W_{CM}^{trans} ไม่ใช่งานของแรงเสียดทานจลน์ เพราะถ้าใช่ต้องเท่ากับแรงเสียดทานจลน์ คูณด้วยการกระจัดของแรงเสียดทานจลน์ แต่ W_{CM}^{trans} มาจากการกระจัดของ CM

ตัวอย่างที่ 5.11 หนูเดินบนจาน

จานมวล M รัศมี R ตรงกลางใส่ตลับลูกปืนให้จานหมุนได้คล่องรอบแกนกลางซึ่งเป็นเพลา หนูตัวหนึ่งมวล m ยืนอยู่บนขอบจาน ทั้งหนูทั้งจานหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω_i จากนั้นหนูเดินจากขอบจานเข้ามาห่างจากแกนกลาง r แล้วหยุดเดิน ความเร็วเชิงมุมของหนูและจานเป็น ω_f

ก)จงหา ω_f ในพจน์ของ ω_i , M , m , R และ r

ข)พลังงานกลของระบบที่ประกอบไปด้วยจานและหนูคงที่หรือไม่ เพราะเหตุใด



รูป ต.ย.5.11

<u>วิธีทำ</u> อันที่จริงแล้วทอร์กเนื่องจากน้ำหนัก mg ของหนู ทำให้ตลับลูกปืนต้องออกแรงทำให้เกิดทอร์กในแนวตั้งฉากกับแกนกลางเพื่อต้านกับทอร์กนี้ นอกจากนี้เมื่อมองทั้งจานทั้งหนูเป็นวัตถุ วัตถุนี้ไม่สมมาตร เพราะมีหนูแค่ตัวเดียว(ดูว่าหนูมีความสูงด้วย) เมื่อให้จุดกำเนิดอยู่กลางจาน product of inertia จะไม่เป็นศูนย์ ทำให้เมื่อจานหมุนตลับลูกปืนต้องออกแรงทำให้เกิดทอร์กในแนวตั้งฉากกับแกนกลางคล้ายกับในตัวอย่างที่2.2.4 ซึ่งมีผลต่ออายุการใช้งานของตลับลูกปืน

แต่ได้กล่าวแล้วว่าเราสนใจปัญหาง่ายๆ เราไม่สนใจว่าตลับลูกปืนจะมีอายุการใช้งานสั้นหรือยาว สนใจแค่ว่า ω_f เป็นเท่าใด ซึ่งทอร์กที่ตรงประเด็นคือทอร์กในแนวของความเร็วเชิงมุม หรือ τ_z ที่เราเคยกล่าวถึงนั่นเอง โดยในตัวอย่างนี้แกน z จะทับกับเพลา

เนื่องจากลูกปืนหมุนได้คล่องมันจึงไม่สามารถออกแรงทำให้เกิดทอร์กในแนว z ได้ ดังนั้น τ_z จึงเป็นศูนย์ หรือก็คือไม่มีการเปลี่ยนแปลงขององค์ประกอบของโมเมนตัมเชิงมุมในแนวของความเร็วเชิงมุม

กรณีการหมุนในระนาบเรารู้ว่า(จากสมการ 1.3.8) ไม่ว่าวัตถุจะสมมาตรหรือไม่ก็ตาม องค์ประกอบของความเร็วเชิงมุมในแนวของความเร็วเชิงมุมเท่ากับ $I\omega$ ดังนั้นถ้า τ_z เป็นศูนย์ $I\omega$ ต้องคงที่

คือ $$I_i\omega_i = I_f\omega_f \rightarrow \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_i = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_i}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)}$$ <u>คำตอบข้อ ก.</u>

เนื่องจาก $mR^2 > mr^2$ ดังนั้น $\omega_f > \omega_i$

ถ้าสมมติว่าพลังงานกลคงที่(**ซึ่งผิดจากความเป็นจริง**)สมการ<u>น่าจะ</u>เป็นดังนี้

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_i^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_f^2 \qquad (1)$$

$$\therefore \omega_f = \frac{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)^{\frac{1}{2}}\omega_i}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$ ซึ่งไม่เท่ากับคำตอบในข้อ ก.

เราได้เคยกล่าวมาแล้วว่าพลังงานกลจะอนุรักษ์นั้นต้องไม่มีงานจากแรงไม่อนุรักษ์ และไม่มีการเปลี่ยนแปลงพลังงานกลไปเป็นพลังงานรูปอื่น หรือพลังงานรูปอื่นไปเป็นพลังงานกล ในตัวอย่างนี้มีพลังงานของหนูซึ่งได้จากการที่หนูกินอาหารเข้าไปซึ่งไม่ใช่พลังงานกลมาเกี่ยวข้องด้วย คือมีการเปลี่ยนพลังงานรูปอื่นเป็นพลังงานกล พลังงานกลจึงไม่คงที่

ถ้าแทน ω_f จากคำตอบข้อ ก. ลงในสมการพลังงานจลน์สุดท้าย คือ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_f^2$ จะเห็นว่าพลังงานจลน์สุดท้ายมากกว่าพลังงานจลน์เริ่มต้น $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_i^2$ พลังงานจลน์ที่เพิ่มขึ้นนี้มาจากพลังงานของหนู <u>คำตอบข้อ ข.</u>

ถ้าหนูเดินย้อนกลับจาก r ไป R พลังงานกลลดลง แต่พลังงานจะหายไปเฉยๆไม่ได้เพียงแต่เปลี่ยนรูปได้ พลังงานกลที่ลดลงนี้ถ้าไม่ไปทำให้พลังงานภายในของจานเพิ่มขึ้นก็ต้องไปทำให้พลังงานภายในของหนูเพิ่มขึ้น หรือทั้งสองอย่าง จานอาจจะไม่เหมือนเดิมหรือหนูอาจจะไม่เหมือนเดิม ตัวอย่างเช่นเส้นเอ็นของหนูอาจจะยืดหน่อยๆทำให้พลังงานศักย์ยืดหยุ่นของเส้นเอ็นเพิ่มขึ้น ที่กล่าวมานี้ต้องการให้นักศึกษาได้คิดวิเคราะห์ จริงหรือไม่ ไม่รู้

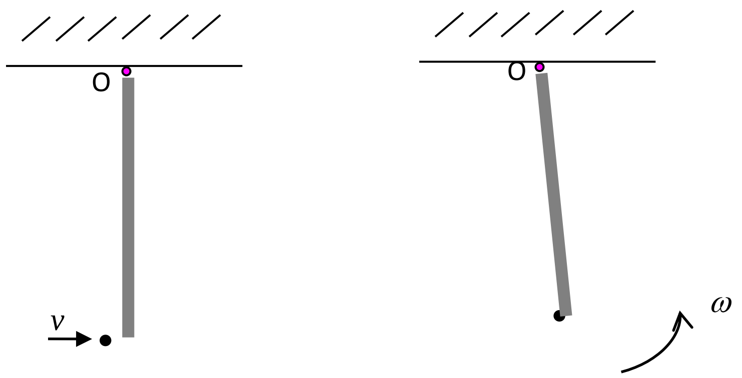
ตัวอย่างที่ 5.12 ดินน้ำมันชนติดกับคานซึ่งห้อยติดกับบานพับ

คานสม่ำเสมอยาว L มวล M ปลายหนึ่งของคานติดบานพับซึ่งหมุนได้คล่องที่จุด O เดิมคานอยู่ในแนวดิ่ง มีดินน้ำมันมวล m ความเร็ว v ในแนวระดับวิ่งเข้าชนและติดกับปลายคาน ดังรูป ต.ย.5.12

ทันทีหลังชน(หลังชนเสร็จ) จงหา (คาน $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$)

ก) ความเร็วเชิงมุมของคานและดินน้ำมัน ข) พลังงานจลน์เหลือเป็นอัตราส่วนเท่าใดเมื่อเทียบกับก่อนชน

ค)โมเมนตัมเชิงเส้นของคานและดินน้ำมัน



รูป ต.ย. 5.12ก.ก่อนชน ข.ทันทีหลังชน

<u>วิธีทำ</u> หลังจากชนกันดินน้ำมันเปลี่ยนรูปร่างเป็นแบนๆ พลังงานกลส่วนหนึ่งถูกใช้ไปเปลี่ยนรูปร่างดินน้ำมัน หรืออาจทำให้อุณหภูมิของดินน้ำมันและของคานสูงขึ้น พลังงานภายในของดินน้ำมันเพิ่มขึ้น พลังงานกลจึงไม่คงที่ เราจึงใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานกลไม่ได้

ถ้าดูทั้งดินน้ำมันและคานเป็นระบบ ขณะกำลังชนกันมีแรงภายนอกระบบในแนวระดับกระทำต่อระบบ คือแรงในแนวระดับที่บานพับทำต่อคาน(ดูในข้อ ค.) โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบในแนวระดับจึงไม่คงที่ เราจึงใช้กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นไม่ได้

แรงภายนอกระบบในแนวดิ่งก็ไม่เป็นศูนย์ เพราะขณะชนกัน CM มีการเคลื่อนที่เป็นวงกลม ความเร่งของ CM มีทิศพุ่งขึ้นในแนวดิ่งเข้าหาบานพับ ดังนั้นบานพับจะออกแรงดึงขึ้นในแนวดิ่งมากกว่า $(M+m)g$

แต่ถ้าเราใช้บานพับ(ซึ่งเป็นจุดตรึง)เป็นจุดอ้างอิง ทอร์กของแรงภายนอกระบบทั้งจากแรงบานพับและแรงโน้มถ่วงเป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงมุมอ้างอิงกับบานพับจึงคงที่

จะเห็นว่าแม้แรงลัพธ์ภายนอกไม่เป็นศูนย์ แต่ถ้าเลือกจุดอ้างอิงให้เหมาะๆ(มักเป็นจุดตรึง) ทอร์กของแรงภายนอกก็เป็นศูนย์ได้

เมื่อวิเคราะห์ได้แล้ว ต่อไปก็เป็นการคำนวณ

ได้กล่าวมาแล้วว่าปัญหาระดับมัธยมหรือฟิสิกส์ทั่วไป1 ทั้งทอร์กและโมเมนตัมเชิงมุม องค์ประกอบที่เราสนใจคือองค์ประกอบในแนวของความเร็วเชิงมุม ซึ่งก็คือในแนวตั้งฉากกับกระดาษในรูป ต.ย.5.12

<u>ก่อนชน</u> เราหาโมเมนตัมเชิงมุมของดินน้ำมันอ้างอิงกับบานพับจากนิยามพื้นฐานของโมเมนตัมเชิงมุมคือ $\bar{L}=\vec{r}\times\vec{P}=\vec{r}\times m\vec{v} \quad = m\,v\,L$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ

<u>ทันทีหลังชน</u> ให้ความเร็วเชิงมุมของคานและดินน้ำมันเป็น ω เนื่องจากโมเมนความเฉื่อยเฉพาะของคานรอบแกนที่ผ่านบานพับคือ $\frac{1}{12}ML^2+M\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ML^2$ และโมเมนความเฉื่อยของดินน้ำมันคือ $m\,L^2$

ดังนั้น หลังชน โมเมนตัมเชิงมุมของคาน+ดินน้ำมัน อ้างอิงกับบานพับ $=\left(\frac{1}{3}ML^2+mL^2\right)\omega$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ

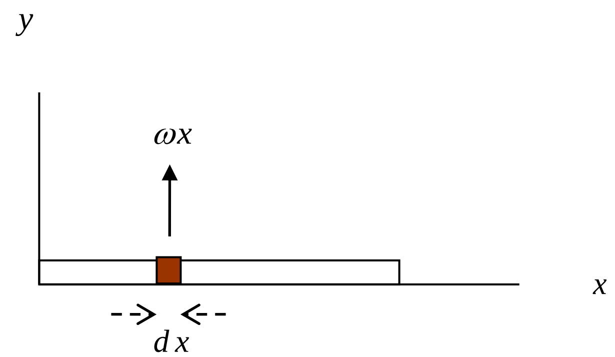
โมเมนตัมเชิงมุมก่อนชนเท่ากับหลังชน $m\,v\,L \;=\left(\frac{1}{3}ML^2+mL^2\right)\omega$

$$\therefore \ \omega = \frac{mv}{L\left(\frac{1}{3}M + m\right)}$$ <u>คำตอบข้อ ก.</u>

พลังงานจลน์หลังชน $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}m v^2\left(\frac{m}{\frac{1}{3}M + m}\right)$

คือเหลือ $\frac{m}{\frac{1}{3}M + m}$ ของก่อนชน <u>คำตอบข้อ ข.</u>

โมเมนตัมเชิงเส้นของคานเราจะคำนวณโดยตรง โดยสมมติว่าคานอยู่ในแนวระดับ ตั้งแกน x ไปตามความยาวของคานให้จุดกำเนิดอยู่ที่บานพับ ดังรูป ต.ย.5.12 ค.



รูป ต.ย.5.12ค.

เนื่องจากคานหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω พิจารณาส่วนย่อยของคานซึ่งยาว dx มวลของส่วนย่อยนี้คือ $\frac{M}{L}dx$ และความเร็วคือ $\omega x \,\hat{j}$ ดังนั้นโมเมนตัมของส่วนย่อยนี้ $d\vec{P}_M$ คือ

$$d\vec{P}_M = \omega x \frac{M}{L} dx \quad \hat{j}$$

เมื่อรวม(อินทิเกรต) โมเมนตัมย่อย ก็จะได้โมเมนตัมเชิงเส้นของคานทั้งชิ้น คือ

$$\vec{P}_M = \int_0^L \omega x \frac{M}{L} dx \quad \hat{j}$$

ในเชิงเทคนิคของการอินทิเกรตเราจะดึงเอาค่าคงที่ออกนอกเครื่องหมายอินทิเกรตก่อน ขณะนี้เราอินทิเกรตเทียบกับ x ถ้า x เปลี่ยนแล้วอะไรที่ไม่เปลี่ยน มันก็จะเป็นค่าคงที่ โดย ω, M, L นั้นเห็นได้

ชัดว่าไม่เปลี่ยน ส่วน $\hat{j}$ นั้นไม่ว่า x จะเป็นที่ใดบนคาน $\hat{j}$ ก็ยังคงมีขนาดหนึ่งหน่วยและทิศชี้ขึ้น(ในรูป ต.ย.5.12ค.)เหมือนเดิม $\hat{j}$ จึงเป็นเวกเตอร์คงที่ ดึงออกนอกเครื่องหมายอินทิเกรตได้ เป็น

$$\vec{P}_M = \hat{j}\,\omega\frac{M}{L}\int_0^L x\,dx = \hat{j}\,\frac{1}{2}M\,\omega L = \frac{1}{2}M\,\omega L\,\hat{j}$$

หลังชน โมเมนตัมเชิงเส้นของดินน้ำมัน $\vec{P}_m = m\omega L\,\hat{j}$

ดังนั้น โมเมนตัมเชิงเส้นหลังชน $\vec{P}_f = \vec{P}_M + \vec{P}_m = \frac{1}{2}M\,\omega L\,\hat{j} + m\omega L\,\hat{j} = \omega\left(\frac{1}{2}ML + mL\right)\hat{j}$

แทนค่า ω จากคำตอบข้อ ก. ลงไป ได้ $\vec{P}_f = \dfrac{mv}{L\left(\frac{1}{3}M+m\right)}L\left(\frac{1}{2}M+m\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}M+m\right)}{\left(\frac{1}{3}M+m\right)}\; mv\;\; \hat{j}$

<u>คำตอบข้อ ค.</u>

โมเมนตัมเชิงเส้นก่อนชนคือ $\vec{P}_i = m\,v\,\hat{j}$

เนื่องจาก $\dfrac{\left(\frac{1}{2}M+m\right)}{\left(\frac{1}{3}M+m\right)} > 1$ ดังนั้น โมเมนตัมเชิงเส้นเพิ่มขึ้น แสดงว่ามีแรงที่บานพับทำต่อคานในแนวระดับทิศไปทางขวาของในรูป ต.ย.5.12ก.

ถ้าเราเปลี่ยนตำแหน่งที่ดินน้ำมันชนคานให้ใกล้ๆกับบานพับ นักศึกษาลองคำนวณดูจะพบว่าแรงที่บานพับทำต่อคานมีทิศไปทางซ้ายของในรูป ต.ย.5.12ก.

ตัวอย่างที่ 5.13 การดลเชิงมุมกระทำต่อดัมเบลซึ่งวางบนพื้นลื่น

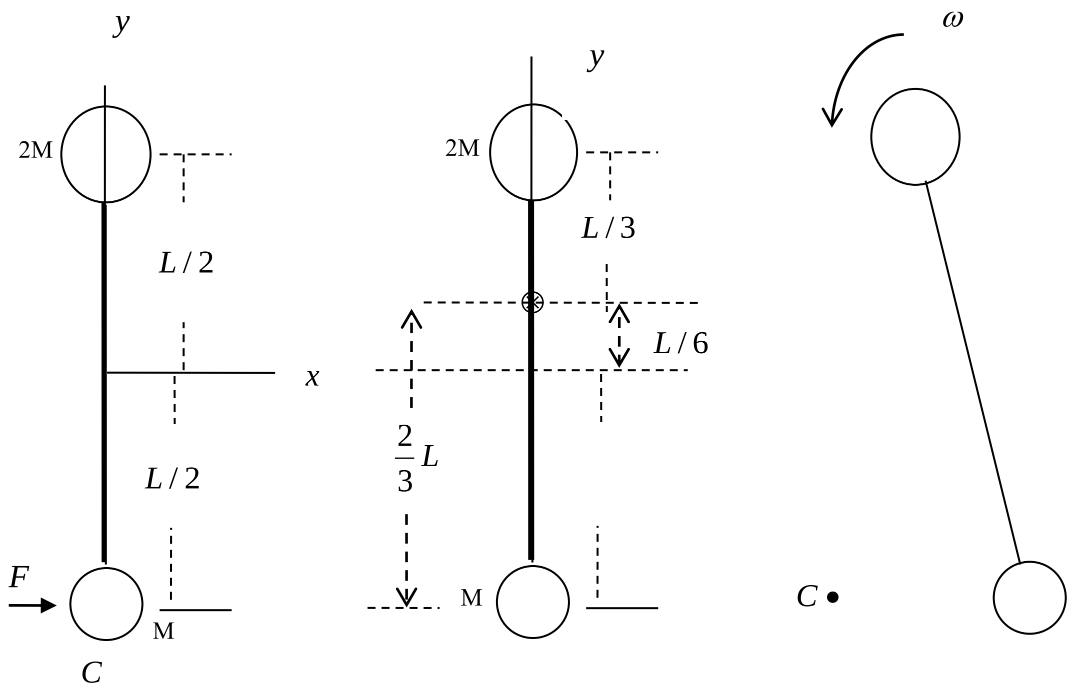
ดัมเบลประกอบด้วยคานเบายาว L ปลายสองด้านติดมวล $2M$ และ M วางนิ่งบนพื้นระดับลื่น ต่อมามีแรง F กระทำต่อมวล M ในแนวตั้งฉากกับคานเป็นเวลาสั้นๆ Δt ดังรูปต.ย. 5.13ก.

ก) จุดศูนย์กลางมวลของดัมเบลมีความเร็วเท่าใด

ข) ดัมเบลหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมเท่าใด

ค) เมื่อเวลาผ่านไป $\pi \dfrac{ML}{F\Delta t}$ ดัมเบลจะอยู่ที่ไหนและเอียงอยู่อย่างไร

ให้ตอบในพจน์ของ M, L, F และ Δt



รูป ต.ย.5.13 ก. ข. ค.ขยายเวลา Δt ให้มากเกินจริง จริงๆแล้วคานยังอยู่ในแนวใกล้เคียงกับแกน y

<u>วิธีทำ</u> สร้างแกน xy ดังรูป 5.13ก. CM จะอยู่บนแกน y โดย

$$y_{CM} = \frac{2M\left(\frac{L}{2}\right) + M\left(-\frac{L}{2}\right)}{2M + M} = \frac{L}{6}$$

เมื่อคำนวณตำแหน่งได้แล้ว นักศึกษาจินตนาการว่าเอาสีดำแต้มคานเป็นจุดดำที่ตำแหน่งนี้ การเคลื่อนที่ของจุดดำก็คือการเคลื่อนที่ของ CM ของดัมเบล

ก) จาก การดลเชิงเส้น = โมเมนตัมเชิงเส้นที่เปลี่ยนไป

ก่อนจะมีแรง F กระทำ ดัมเบลอยู่นิ่ง ดังนั้น

$$F\,\Delta t\,\hat{i} = (2M + M)\,\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{F\Delta t}{3M}\,\hat{i}$$ <u>คำตอบข้อก.</u>

ข) เราจะทำ 2 วิธี วิธีแรกใช้จุดตรึงเป็นจุดอ้าง วิธีที่สองใช้ CM เป็นจุดอ้างอิง

<u>วิธีที่1</u> ให้จุด C เป็นจุดตรึงบนพื้น เมื่อเริ่มต้นมวล M ทับกับจุด C แนวของแรง F ผ่านจุด C ทอร์กของแรง F จึงเป็นศูนย์ การดลเชิงมุมก็เป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงมุม(เทียบกับจุด C) ก็คงที่

ก่อนมีแรง F กระทำ ดัมเบลอยู่นิ่ง โมเมนตัมเชิงมุมเป็นศูนย์ หลังมีแรง F กระทำโมเมนตัมเชิงมุมก็ต้องเป็นศูนย์เช่นเดิม เพราะทอร์กของแรง F เป็นศูนย์ เมื่ออ้างอิงกับจุด C

โมเมนตัมเชิงมุมอ้างอิงกับจุดตรึงหาได้จากสมการ (ค4) ของภาคผนวก ค. คือ

$$\vec{L}_{fixed} = \vec{L}_{orbit} + \vec{L}_{spin}$$

เมื่อ $\vec{L}_{orbit} = \vec{r}_{CM,C} \times 3M\,\vec{v}_{CM} = \left(\frac{2}{3}L\,\hat{j}\right)\times 3M\left(\frac{F\Delta t}{3M}\,\hat{i}\right) = \frac{2}{3}LF\Delta t\,(-\hat{k})$

โมเมนความเฉื่อยของมวล $2M$ รอบแกนที่ผ่าน CM เท่ากับ $2M\left(\frac{L}{3}\right)^2$ ส่วนของมวล M เท่ากับ $M\left(\frac{2L}{3}\right)^2$ ดังนั้น

$$\vec{L}_{spin} = \left\{2M\left(\frac{L}{3}\right)^2 + M\left(\frac{2L}{3}\right)^2\right\}\omega\,\hat{k} \quad = \frac{2}{3}ML^2\omega\,\hat{k}$$

แต่โมเมนตัมเชิงมุมเท่ากับศูนย์ $0 = \frac{2}{3}LF\Delta t\,(-\hat{k}) + \frac{2}{3}ML^2\omega\,\hat{k}$

$$\omega = \frac{F\Delta t}{ML}$$

<u>วิธีที 2</u> ใช้ CM เป็นจุดอ้างอิง

(นักศึกษาควรระลึกได้ว่า จุดอ้างอิงซึ่งเป็น CM นี้ เป็นจุดที่ติดไปกับวัตถุ คือติดไปกับคานของดัมเบล นั่นเอง)

เมื่อใช้ CM เป็นจุดอ้างอิง การดลเชิงมุมไม่เป็นศูนย์ เราก็ใช้ความสัมพันธ์

การดลเชิงมุม= โมเมนตัมเชิงมุมที่เปลี่ยนไป

โดยทั้งการดลเชิงมุมและโมเมนตัมเชิงมุมนั้น ได้กล่าวมาแล้วว่าเป็นองค์ประกอบในแนวความเร็วเชิงมุม ก็คือในแนวตั้งฉากกับกระดาษ(แนว z) นั่นเอง

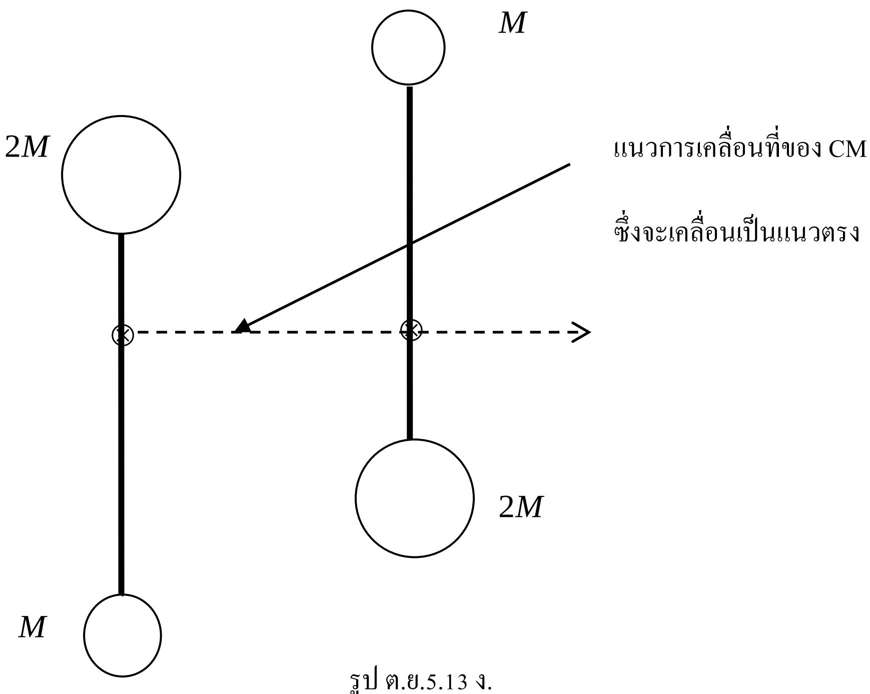
$$\therefore\ F\left(\frac{2}{3}L\right)\Delta t = \left\{2M\left(\frac{L}{3}\right)^2 + M\left(\frac{2L}{3}\right)^2\right\}\omega$$

$$\omega = \frac{F\Delta t}{ML}$$

<u>คำตอบข้อ ข.</u>

เนื่องจาก $\vec{v}_{CM} = \frac{F\Delta t}{3M}\ \hat{i}$ ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไป $\pi\frac{ML}{F\Delta t}$ จุดสีดำที่แต้ม(CM)ไว้ที่คานจะเคลื่อนที่ไปทางขวาเป็นระยะทาง $\frac{\pi}{3}L$ โดยดัมเบลจะหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\left(\frac{F\Delta t}{ML}\right)\left(\pi\frac{ML}{F\Delta t}\right) = \pi$ เรเดียน

ดัมเบลจึงอยู่ดังในรูป 5.13 ง. <u>คำตอบข้อ ค.</u>



รูป ต.ย.5.13 ง.

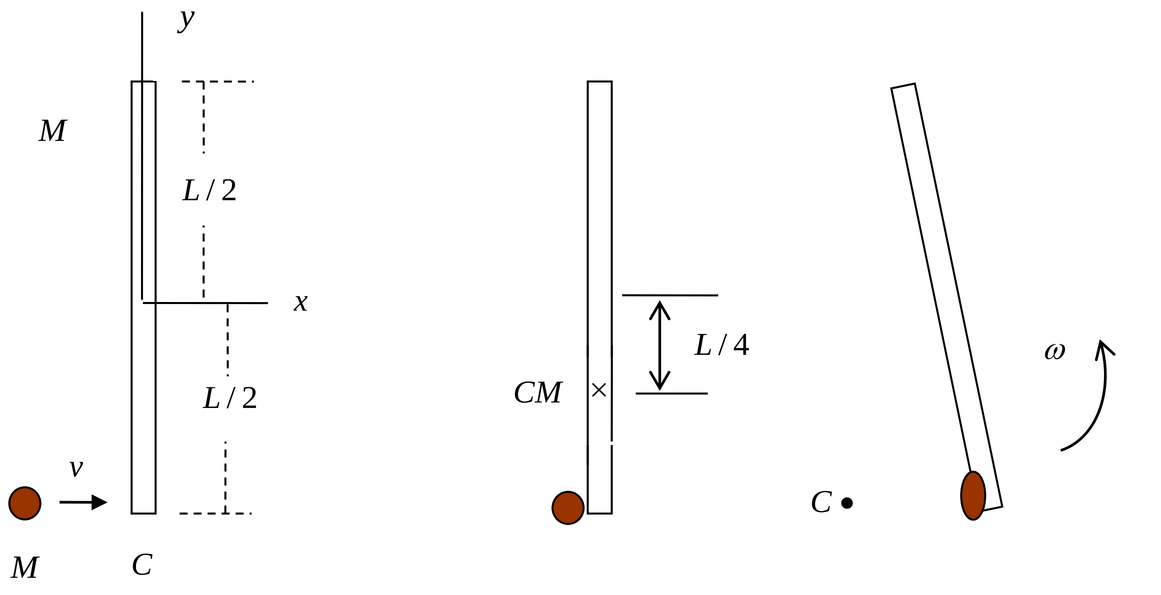
ตัวอย่างที่ 5.14 มวล M พุ่งเข้าชนและเสียบติดกับคานซึ่งวางบนพื้นลื่น

คานมีมวล M ยาว L วางนิ่งบนพื้นระดับลื่น ต่อมามีมวล M ขนาดเท่ากันกับมวลของคาน มวลนี้มีความเร็ว v ไถลไปตามพื้นพุ่งชนปลายคานในแนวตั้งฉากกับคานแล้วเสียบติดไปกับคาน ดังรูปต.ย.5.14

ก)จุดศูนย์กลางมวลของระบบ (คาน+มวล)มีความเร็วเท่าใด

ข)ระบบหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมเท่าใด

ค)เมื่อระบบหมุนครบ1 รอบ CM อยู่ห่างจากเดิมเท่าใด



รูป ต.ย.5.14ก.

ข. ทันทีก่อนชน

ค.ทันทีหลังชน แต่ขยายเขียนให้เห็นจุดตรึง C

<u>วิธีทำ</u> เมื่อมองดูคานและมวลเป็นระบบ แรงภายนอกระบบมีแรงโน้มถ่วงและแรง N ที่พื้นทำต่อคาน แรงเหล่านี้อยู่ในแนว z ไม่มีแรงภายนอกระบบในแนว x ดังนั้นโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบในแนว x คงที่

$$M\,v = 2M\,v_{CM} \rightarrow v_{CM} = \frac{v}{2}$$ ทิศไปทางขวา <u>คำตอบข้อก.</u>

การชนกันแล้วติดกันไปจะมีการสูญเสียพลังงานกล เราจึงใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานกลไม่ได้

ถ้าดูทั้งมวลและคานเป็นระบบ ขณะกำลังชนกันมีแรงภายนอกระบบคือแรงโน้มถ่วงและแรง N แต่แรงทั้งสองขนาดเท่ากัน(เราตีความว่าหลังชนแล้วระบบเคลื่อนที่ในระนาบ xy ความเร่งของ CM ในแนว z เป็นศูนย์) ก็คือแรงลัพธ์ของแรงภายนอกระบบเป็นศูนย์ ทอร์กของแรงภายนอกเป็นศูนย์ด้วย ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุมจึงคงที่

เราจะทำ 2 วิธีคือ ใช้จุด CM เป็นจุดอ้างอิง และใช้จุดตรึงเป็นจุดอ้างอิง

<u>วิธีที่ 1</u> ใช้ CM เป็นจุดอ้างอิง

สร้างแกน xy ดังรูป ต.ย.5.14ก. เราจะดูเหตุการณ์ทันทีก่อนชนดังรูป ข. ซึ่ง CM จะอยู่บนแกน y โดย

$$y_{CM} = \frac{M(0)+M\left(-\frac{L}{2}\right)}{M+M} = -\frac{L}{4}$$

<u>ก่อนชน</u> โมเมนตัมเชิงมุมของมวลอ้างอิงกับ CM $= M\,v\,\frac{L}{4}$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ

<u>ทันทีหลังชน</u> ให้ความเร็วเชิงมุมของคานและดินน้ำมันเป็น ω โมเมนความเฉื่อยเฉพาะของคานรอบแกนที่ผ่าน CM ของระบบคือ $\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2$ และโมเมนความเฉื่อยของดินน้ำมันคือ $M\left(\frac{L}{4}\right)^2$

ดังนั้น หลังชน โมเมนตัมเชิงมุมของคาน+ดินน้ำมัน อ้างอิงกับ CM

$$=\left(\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2\right)\omega$$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ

$$\therefore M\,v\frac{L}{4} = \left(\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{6}{5}\frac{v}{L}$$

<u>วิธีที่ 2</u> ให้จุด C เป็นจุดตรึงบนพื้น เมื่อเริ่มต้นปลายคานด้านล่างทับกับจุด C เนื่องจากแรงภายนอกระบบเป็นศูนย์ ทอร์กของแรงภายนอกระบบ(อ้างอิงกับจุด C)ก็เป็นศูนย์ด้วย โมเมนตัมเชิงมุม(อ้างอิงกับจุด C) ก็คงที่

เมื่อเริ่มต้นคานอยู่นิ่ง โมเมนตัมเชิงมุมของคาน(อ้างอิงกับจุด C) เป็นศูนย์ ส่วนมวล M มีความเร็วผ่านจุด C โมเมนตัมเชิงมุมของมวลจึงเป็นศูนย์เช่นกัน ก็คือโมเมนตัมเชิงมุมก่อนชนเป็นศูนย์

หลังชน โมเมนตัมเชิงมุมอ้างอิงกับจุดตรึง C หาได้จากสมการ (ค4) ของภาคผนวก ค. คือ

$$\vec{L}_{fixed} = \vec{L}_{orbit} + \vec{L}_{spin}$$

เมื่อ $\vec{L}_{orbit} = \left(\frac{L}{4}\right)(M+M)\left(v_{CM}\right) = \left(\frac{L}{4}\right)(2M)\left(\frac{v}{2}\right)$ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ

$$\vec{L}_{spin} = \left(\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2\right)\omega$$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ

โมเมนตัมเชิงมุมก่อนชนเท่ากับหลังชน และให้ทิศพุ่งออกจากกระดาษเป็นบวก

$$\therefore\ 0 = -M\,v\frac{L}{4} + \left(\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2\right)\omega$$

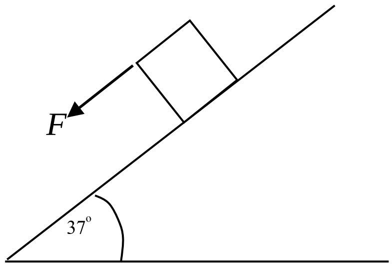
$$\omega = \frac{6}{5}\frac{v}{L}$$ <u>คำตอบข้อ ข.</u>

เนื่องจากเวลาในการหมุน 1 รอบ คือ $\frac{2\pi}{\omega}$

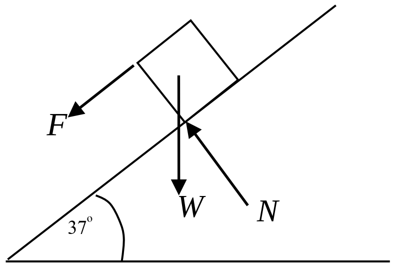
ดังนั้น $x_{CM} = v_{CM}\,\frac{2\pi}{\omega} = \frac{v}{2}\left(\frac{2\pi}{\left(\frac{6}{5}\frac{v}{L}\right)}\right) = \frac{5}{6}\pi L$ <u>คำตอบข้อ ค.</u>

ตัวอย่างที่ 5.15 กล่องไถลตามพื้นเอียง

กล่องหนัก 50 นิวตัน ฐานกว้าง 0.4 เมตร สูง 0.5 เมตร ถูกปล่อยให้ไถลลงมาตามพื้นเอียงลื่น ถ้าออกแรง N ดึงผิวกล่องในแนวขนานกับพื้นเอียง ดังรูปต.ย.5.15ก. แรงนี้มีขนาดมากที่สุดกี่นิวตันจึงจะทำให้กล่องไม่ล้มคว่ำลงมา



รูปต.ย.5.15ก



(ข)

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากพื้นเอียงเป็นพื้นลื่น มีแต่แรงตั้งฉาก N ของพื้นเอียงโดยไม่มีแรงเสียดทาน ในขณะที่กล่องกำลังจะล้มคว่ำนั้นแรง N จะกระทำที่ขอบล่างของกล่องดังรูป ข.

เราจะทำ 3 วิธี

<u>วิธีที่1</u> ใช้ CM เป็นจุดอ้างอิง

เนื่องจากกล่องไม่มีความเร่งในแนวตั้งฉากกับพื้นเอียง ดังนั้น จะได้ว่า

$$50\cos 37^0 - N = 0 \qquad (1)$$

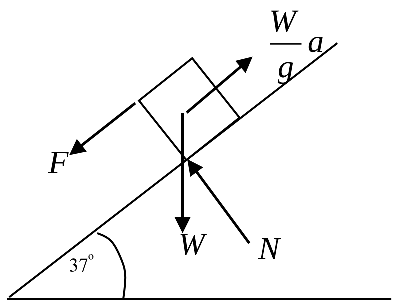
จากสมการ $\tau = I\alpha$ กล่องไถลลงมาโดยไม่มีการหมุนคือความเร่งเชิงมุมเป็นศูนย์ ดังนั้นทอร์ก(อ้างอิงกับ CM) ต้องเป็นศูนย์ คือ

$$N(0.2) - F(0.25) = 0 \qquad (2)$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้

$$F = 32 \quad \text{นิวตัน}$$

<u>วิธีที่2</u> ใช้ขอบล่างของกล่องตรงที่แรง N กระทำเป็นจุดอ้างอิง เนื่องจากจุดนี้มีความเร่งซึ่งเท่ากับความเร่งของกล่อง เราจึงใส่แรงเทียม $\frac{W}{g}a$ ทิศชี้ขึ้นตามพื้นเอียง ที่ CM ของกล่อง ทอร์กของทั้งแรงจริงและแรงเทียม (อ้างอิงกับขอบล่าง) เป็นศูนย์



รูปต.ย.5.15ค

$$F(0.5)+W\sin 37^0(0.25)-\frac{W}{g}a(0.25)-W\cos 37^0(0.2)=0 \qquad (3)$$

ดูในแนวพื้นเอียง

$$F+W\sin 37^0=\frac{W}{g}a$$

$$a=\frac{(F+0.6W)\,g}{W} \qquad (4)$$

แทน 4 ใน 3 และแทน $W=50$ นิวตัน จะได้ $F=32$ นิวตัน

<u>วิธีที่3</u> ใช้จุดตรึงเป็นจุดอ้างอิง เลือกจุดตรึงบนพื้นเอียงที่ทับกับขอบล่าง จะได้ทำให้ทอร์กของ N เป็นศูนย์

โดยทอร์กทั้งหมดเป็น $F(0.5)+W\sin 37^0(0.25)-W\cos 37^0(0.2)$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ

สมมติให้กล่องมีความเร็วต้น u ดังนั้น ที่เวลา t ใดๆ $v_{CM}=u+at$ ทิศลงตามพื้นเอียง

ดังนั้น $\vec{L}_{orbit}=(0.25)\left(\frac{W}{g}\right)(u+at)$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ

กล่องไม่ได้หมุนดังนั้น $\vec{L}_{spin}=0$

จาก $\vec{L}_{fixed}=\vec{L}_{orbit}+\vec{L}_{spin}=(0.25)\left(\frac{W}{g}\right)(u+at)$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ

เนื่องจากความเร็วต้น u คงที่ จะได้ $\frac{dL}{dt} = (0.25)\left(\frac{W}{g}\right)a$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ

$\because \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ดังนั้น

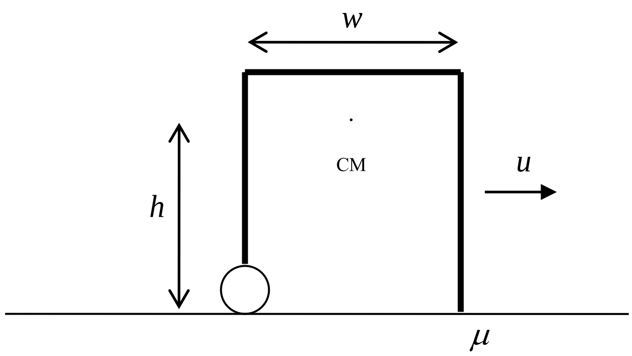
$$F(0.5) + W\sin 37^0(0.25) - W\cos 37^0(0.2) = (0.25)\left(\frac{W}{g}\right)a \qquad (5)$$

สมการ 5 เป็นสมการเดียวกันกับสมการ 3 เมื่อแทน a จากสมการ 4 ลงไปก็จะได้ $F = 32$ นิวตัน

ตัวอย่างที่ 5.16 โต๊ะมีล้อด้านเดียวไถลบนพื้นราบฝืด

โต๊ะมวล M กว้าง w มีจุดศูนย์กลางมวล (CM) สูงจากพื้น h ในแนวกึ่งกลางโต๊ะ ขาโต๊ะด้านหลังมีล้อเบาหมุนได้โดยไม่ฝืด ด้านหน้าไม่มีล้อและมีสัมประสิทธิ์ความเสียดทานกับพื้น μ

ถ้าโต๊ะนี้กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วต้น u ในแนวระดับไปทางขวา ดังรูป ต.ย.5.16ก.



รูป ต.ย.5.16ก. แผนภาพมองจากด้านข้าง

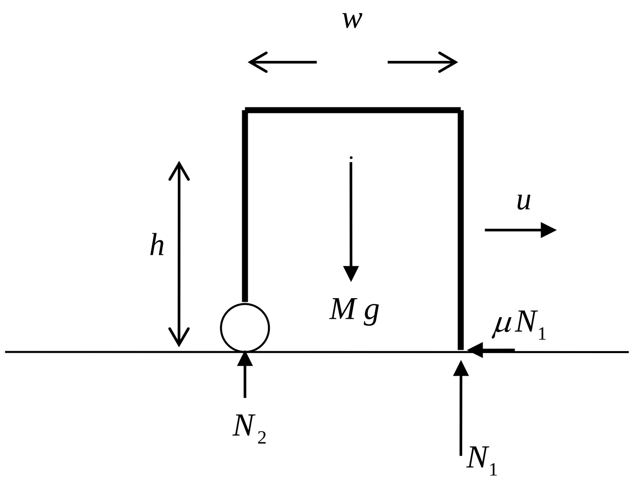
ก) โต๊ะจะเคลื่อนที่ไปได้เป็นระยะทางเท่าใดจึงจะหยุด

ข) จงหาช่วงของค่า μ ที่โต๊ะสามารถเคลื่อนที่ได้โดยไม่ล้มคว่ำ

ค) หากโต๊ะเคลื่อนที่กลับกันโดยมีล้ออยู่ด้านหน้า ด้วยอัตราเร็ว u เท่าเดิม ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้จะเป็น n เท่าของระยะทางในข้อ ก) จงหาค่า μ ในรูปของ n, w และ h

<u>วิธีทำ</u> เมื่อดูโจทย์ข้อนี้นักศึกษาควรระลึกถึงเมื่อรถเบรก ล้อหน้าจะรับน้ำหนักมากกว่าล้อหลัง

ก) ความจริงแล้วโต๊ะมี 2 ล้อ ขาโต๊ะที่ไม่ติดล้อก็มี 2 ข้าง แต่เราเขียนรูปฉายของทั้งโต๊ะและแรงลงบนกระดาษ ดังรูป 5.16 ข. ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2.2.2.1



เนื่องจาก CM ไม่มีความเร่งในแนวดิ่ง $N_1 + N_2 = Mg$ (1)

โต๊ะเคลื่อนที่ไปทางขวาและช้าลงเรื่อยๆ CM จึงมีความเร่ง a ทิศไปทางซ้าย

ดังนั้น $\mu N_1 = Ma$ (2)

สมการ (1) และ (2) เป็นสมการเชิงเส้นสองสมการ (ได้มาจากการพิจารณาการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่) มีตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว (สมมติว่ารู้ค่า μ) คือ N_1, N_2 และ a สมการยังไม่พอ เราจึงจะพิจารณาการหมุนบ้าง เราจะทำ 3 วิธีโดยใช้จุดอ้างอิง 3 จุดคือ1. CM เป็นจุดอ้างอิง 2. จุดซึ่งติดไปกับขาโต๊ะด้านขวา ณ ตำแหน่งที่แตะพื้น 3.จุดตรึงบนพื้น ณ ตำแหน่งที่ติดกับขาโต๊ะ

<u>วิธีที่1</u>   ใช้ CM เป็นจุดอ้างอิง

$$\tau_{CM} = N_1 \frac{w}{2} - N_2 \frac{w}{2} - \mu N_1 h$$ ทิศพุ่งออกจากหน้ากระดาษ

จากสมการ $\tau = I\alpha$ โต๊ะไถลโดยไม่มีการหมุนคือความเร่งเชิงมุมเป็นศูนย์ ดังนั้นทอร์ก(อ้างอิงกับCM) ต้องเป็นศูนย์ คือ

$$0 = N_1 \frac{w}{2} - N_2 \frac{w}{2} - \mu N_1 h \qquad (3)$$

สมการ (1) (2) และ (3) เป็นสมการเชิงเส้นสามสมการ มีตัวไม่รู้ค่าสามตัวคือ N_1, N_2 และ a แก้สมการหาค่า a ได้ $a = \frac{wg\,\mu}{2(w-\mu h)}$

<u>วิธีที่2</u> ใช้จุดอ้างอิงเป็นจุดที่ติดไปกับกึ่งกลางของขาโต๊ะด้านขวาทั้งสองข้าง ในรูปฉายของ ต.ย.5.16ข. คือจุดบนขาโต๊ะด้านขวา ณ ตำแหน่งที่แตะกับพื้น

เนื่องจากจุดนี้มีความเร่ง a ทิศไปทางซ้าย เราจึงต้องใส่แรงเทียม Ma ทิศไปทางขวาที่ตำแหน่ง CM เนื่องจากโต๊ะไถลโดยไม่มีการหมุน ดังนั้นทอร์กจริงและทอร์กเทียม อ้างอิงกับจุดนี้ ต้องเป็นศูนย์ คือ

$$0 = Mg\frac{w}{2} - N_2 w - Mah \qquad (4)$$

จากสมการ (1) (2) และ (4) แก้สมการหาค่า a ได้เป็น

$$a = \frac{wg\,\mu}{2(w-\mu h)}$$ เท่ากับวิธีที่1

<u>วิธีที่ </u>3 ใช้จุดตรึงบนพื้น ณ ตำแหน่งที่ติดกับขาโต๊ะเป็นจุดอ้างอิง

โมเมนตัมเชิงมุมเทียบกับจุดนี้คือ $\vec{L}_{fixed} = \vec{L}_{orbit} + \vec{L}_{spin}$

โดย $\vec{L}_{orbit} = M(u-at)h$ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ และ เนื่องจากโต๊ะไม่หมุน ดังนั้น $\vec{L}_{spin} = 0$

$$\therefore N_2 w - Mg\frac{w}{2} = \frac{d}{dt}\big(M(u-at)h\big) = -Mah$$

ซึ่งเป็นสมการเดียวกันกับสมการ(4) ดังนั้นจะได้ a เท่ากันกับวิธีอื่น คือ $a = \frac{wg\,\mu}{2(w-\mu h)}$

เนื่องจาก a เป็นค่าคงที่ ดังนั้นใช้สูตร $v^2 = u^2 + 2aS$ ได้ระยะที่เคลื่อนไกลสุด $S_1 = \frac{u^2}{wgh}(w-\mu h)$

<u>คำตอบข้อ ก.</u>

ข) จากสมการ (4) $N_2 = \frac{Mg}{2} - Ma\frac{h}{w}$

โต๊ะจะยังไม่ล้มถ้า $N_2 > 0$ คือ $\frac{Mg}{2} - Ma\frac{h}{w} > 0$

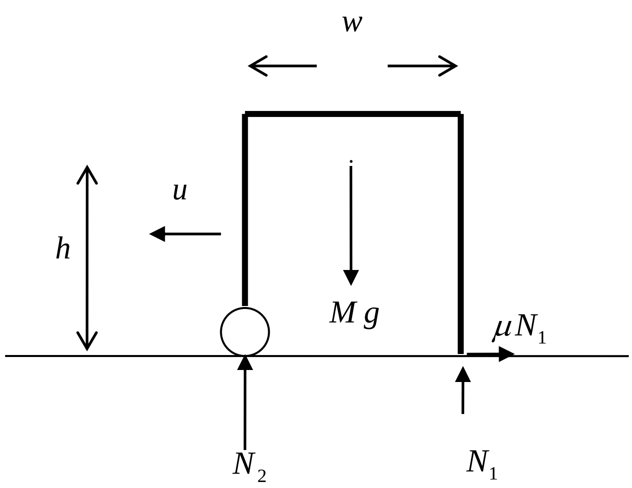
หรือ $a < \dfrac{wg}{2h}$

แต่จากข้อ ก) $a = \dfrac{wg\mu}{2(w-\mu h)}$

ดังนั้น $\dfrac{wg\mu}{2(w-\mu h)} < \dfrac{wg}{2h} \Rightarrow \mu h < w - \mu h \Rightarrow 2\mu h < w$

หรือ $\mu < \dfrac{w}{2h}$ <u>คำตอบข้อ ข</u>

ค) รูปฉายเป็นดังรูป ต.ย.5.16ค.



เนื่องจาก CM ไม่มีความเร่งในแนวดิ่ง $N_1 + N_2 = Mg$ (5)

โต๊ะเคลื่อนที่ไปทางซ้ายและช้าลงเรื่อยๆ CM จึงมีความเร่ง a ทิศไปทางขวา

ดังนั้น $\mu N_1 = Ma$ (6)

สมการ (5) และ (6) มีตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว สมการยังไม่พอ จึงต้องพิจารณาการเคลื่อนที่แบบหมุนเพิ่มเติม เราสามารถเลือกจุดอ้างอิงได้หลายจุด แต่จะเลือกจุดซึ่งติดไปกับขาโต๊ะด้านขวาตรงที่แตะกับพื้นในรูปฉายของ ต.ย.5.16ค. เป็นจุดอ้างอิง (จุดเดียวกับวิธีที่ 2 ในข้อ ก.)

เนื่องจากจุดนี้มีความเร่ง a ทิศไปทางขวา เราจึงต้องใส่แรงเทียม Ma ทิศไปทางซ้ายที่ตำแหน่ง CM เนื่องจากโต๊ะไถลโดยไม่มีการหมุน ดังนั้นทอร์กจริงและทอร์กเทียม อ้างอิงกับจุดนี้ ต้องเป็นศูนย์ คือ

$$0 = Mg\frac{w}{2} - N_2 w + M a h \qquad (7)$$

จากสมการ (5) (6) และ (7) แก้สมการหาค่า a ได้เป็น

$a = \dfrac{wg\mu}{2(w+\mu h)}$ และจะ ได้ระยะที่เคลื่อนไกลสุด $S_2 = \dfrac{u^2}{wgh}(w+\mu h)$

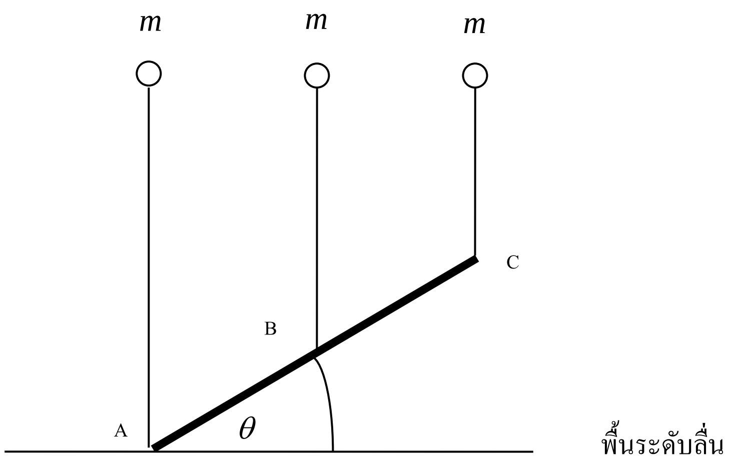
จากโจทย์ $S_2 = n S_1$

ดังนั้น $\dfrac{u^2}{wgh}(w+\mu h) = n\dfrac{u^2}{wgh}(w-\mu h)$

หรือ $\mu = \dfrac{w(n-1)}{h(n+1)}$ <u>คำตอบข้อ ค.</u>

<u>หมายเหตุ</u> N_1 เมื่อโต๊ะเคลื่อนที่ไปทางขวาจะมากกว่า N_1 เมื่อโต๊ะเคลื่อนที่ไปทางซ้าย ซึ่งสอดคล้องกับเมื่อรถยนต์เบรกล้อหน้าจะรับน้ำหนักมากกว่าล้อหลัง ในข้อนี้เนื่องจากแรงเสียดทานเท่ากับ μN_1 ดังนั้นแรงเสียดทานในข้อ ก. จึงมากกว่าข้อ ค. ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ในข้อ ก จึงน้อยกว่าในข้อค.

ตัวอย่างที่ 5.17 การตกของมวลกับท่อนไม้



รูปที่ 1

ระบบประกอบด้วยท่อนไม้สม่ำเสมอมวล M ยาว L เอียงทำมุม θ กับแนวระดับ ปลายทั้งสองและจุดศูนย์กลางมวลของท่อนไม้ผูกกับก้อนมวล m 3 ก้อนด้วยเชือกเบา โดยที่มวลทั้ง 3 ก้อนเรียงอยู่ในแนวระดับเดียวกัน และ $M << m$ ทั้งระบบ(ท่อนไม้และก้อนมวล)ถูกจับไว้โดยให้เชือกไม่ตึงและไม่หย่อน ดังรูปที่ 1 หลังจากนั้นปล่อยให้ระบบตกลงมาอย่างอิสระ

a)มวลแต่ละก้อนมีขนาดความเร่งมากกว่า เท่ากับ หรือน้อยกว่า g

<u>ในคำถามต่อไปนี้ ให้พิจารณาขณะที่ปลาย A แตะสัมผัสพื้นพอดีโดยไม่กระดอนขึ้น</u> และพื้นลื่น เราจะหาเงื่อนไขที่ทำให้เชือกทุกเส้นหย่อน โดยพิจารณาตามขั้นตอนต่อไปนี้

b)ถ้าไม่มีมวลทั้งสามผูกอยู่ จุด A,B และ C จะมีความเร่งในแนวดิ่งเป็นเท่าใด ตอบในรูปของ g และ θ

c)ถ้ามีมวลทั้งสามผูกอยู่ จงหาช่วงของมุม θ (เป็นตัวเลข) ที่ทำให้เชือกหย่อนทั้งสามเส้น

d)ในกรณีที่ θ มีค่าอยู่นอกช่วงในข้อ c) จงหาความเร่งของมวลแต่ละก้อน

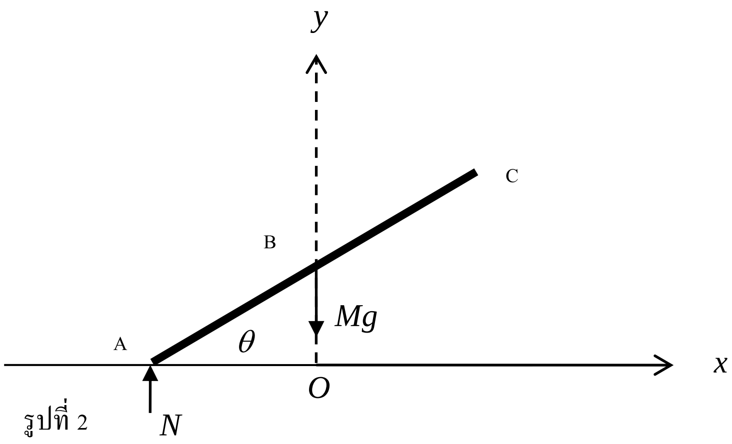
<u>วิธีทำ</u>

a) ตอบได้เลยว่าเท่ากับ g
b) ขอเน้นก่อนว่า จุด A,B และ C เป็นจุดที่ติดไปกับท่อนไม้
   ไม่มีแรงในแนวระดับทำต่อท่อนไม้ เนื่องจากพื้นลื่น แรงที่พื้นทำต่อปลาย A อยู่ใน

แนวดิ่ง แรงโน้มถ่วงก็อยู่ในแนวดิ่ง ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล(จุด B)จึงอยู่ในแนวดิ่ง หรือก็คือจุด B จะเคลื่อนที่ลงมาในแนวเดิม ปลาย A จะไถลไปบนพื้นโดยมีความเร่งในแนวราบ ส่วนความเร่งในแนวดิ่งเป็นศูนย์ เรามองได้ว่าคานหมุนด้วยความเร่งเชิงมุม $\alpha = \ddot{\theta}$

เนื่องจากปลาย A ไถลไปตามพื้น เราหาความเร่งในแนวดิ่งของจุด B และ C ในพจน์ของ $\ddot{\theta}$ ได้ดังต่อไปนี้

สร้างแกน xy ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

จากรูป $y_B = \frac{L}{2}\sin\theta$ หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้ $\dot{y}_B = \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาอีกครั้ง $\ddot{y}_B = \frac{L}{2}\left\{\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2(-\sin\theta)\right\}$

ขณะที่ปลาย A กระทบพื้นนั้น $\ddot{\theta} \neq 0$ แต่ $\dot{\theta} = 0$ เพราะเดิมท่อนไม้ไม่ได้หมุนแต่กำลังเริ่มหมุน(อย่าลืมว่าเราดูในขณะที่ปลาย A กำลังสัมผัสพื้นพอดี)

ดังนั้น $\ddot{y}_B = \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta$ (1)

ทำนองเดียวกัน $\ddot{y}_C = L\ddot{\theta}\cos\theta$ (2)

ถ้าเราหาความเร่งเชิงมุม $\ddot{\theta}$ ได้ ก็จะหา $\ddot{y}_B$ และ $\ddot{y}_C$ ได้ การหา $\ddot{\theta}$ เราจะหาโดยใช้จุดอ้างอิงต่างกัน 3 จุด คือ 1. CM(จุดB) 2. จุด A 3.จุด C

1.ใช้ CM (ติดไปกับวัตถุ)เป็นจุดอ้างอิง

จากภาคผนวก ง. เมื่อเรากำหนด θ เป็นดังรูปที่ 1 (หรือ2) ถ้าให้มุม θ เพิ่มมากขึ้นการหมุนเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา ทิศที่เป็นบวกจึงพุ่งออกจากกระดาษ ทอร์กที่มีทิศพุ่งออกจากกระดาษก็เป็นบวก ทอร์กที่มีทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษก็เป็นลบ

เมื่อใช้ CM เป็นจุดอ้างอิง ทอร์กของแรงโน้มถ่วงเป็นศูนย์ มีแต่ทอร์กของ N ขนาด $N\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)$ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ ดังนั้น

$$-N\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) = I_{CM}\ddot{\theta} = \frac{1}{12}ML^2\ddot{\theta} \qquad (3)$$

ดูแบบเลื่อนที่บ้าง ดูในแนวดิ่ง (ดูเพิ่มเติมในภาคผนวก ง.)

$$N - Mg = M\,a_{CM,y} = M\,\ddot{y}_B$$

แทน $\ddot{y}_B$ ในสมการ (1) ลงไป จะได้

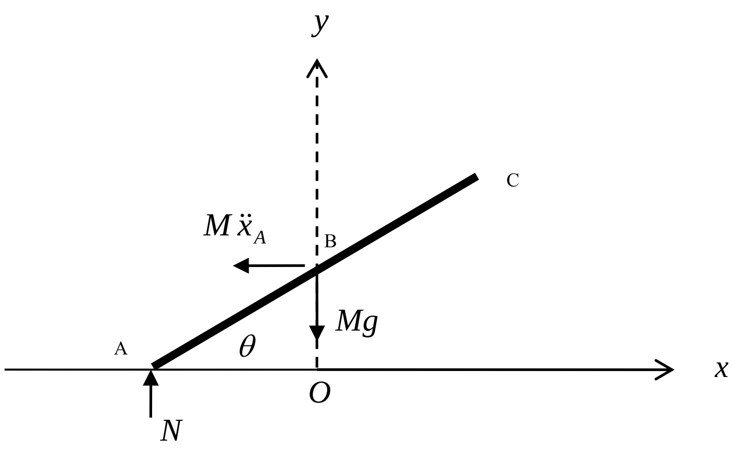
$$N - Mg = M\,\ddot{y}_B = M\left(\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta\right) \qquad (4)$$

จาก (3) และ (4) จะได้ $\ddot{\theta} = -\dfrac{6g\cos\theta}{L(1+3\cos^2\theta)}$ (5)

คือขนาดเป็น $\dfrac{6g\cos\theta}{L(1+3\cos^2\theta)}$ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ

2.ใช้จุด A (ติดไปกับวัตถุ)เป็นจุดอ้างอิง

เนื่องจากจุด A มีความเร่งในแนวแกน x โดยไม่มีความเร่งในแนวแกน y เราจึงใส่แรงเทียม ใส่แรงเทียม $-M\,\ddot{x}_A$ ที่ CM ดังรูป (พึงสังเกต ความเร่งของปลาย A จริงๆแล้วไปทางซ้าย แต่เราเขียนในรูปทั่วไปคือ $\ddot{x}_A$ ซึ่งทิศที่เป็นบวกทางขวา ดังนั้นเมื่อใส่แรงเทียมที่ CM จึงมีทิศไปทางซ้าย ดังในรูป)



ความเร่งของจุด A ในแนวแกน x หาได้จากว่า จุด B อยู่ในแนวของแกน y ตลออดเวลา ดังนั้น พิกัด x ของจุด A คือ x_A จึงเป็น $x_A = -\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)$ หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาได้ $\dot{x}_A = \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta$ หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาอีกครั้ง จะได้ $\ddot{x}_A = \frac{L}{2}\left\{\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right\}$

แต่ขณะที่ท่อนไม้สัมผัสพื้นพอดีนั้น $\dot{\theta} = 0$ ดังนั้น $\ddot{x}_A = \frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta$

ทอร์กเทียมที่อ้างอิงกับจุด A จึงมีขนาด $M\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right)$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ

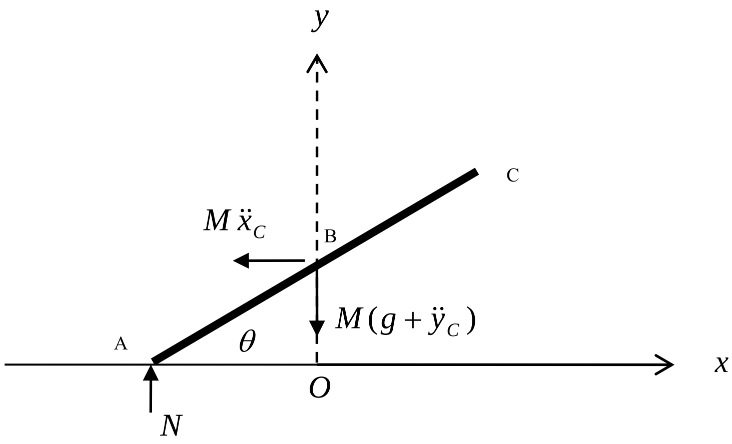
ทอร์กของ Mg มีขนาดเป็น $Mg\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)$ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ

$$\therefore \quad M\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right) - Mg\frac{L}{2}\cos\theta = I_A\ddot{\theta} = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta}$$

จะได้ $\ddot{\theta} = -\dfrac{6g\cos\theta}{L(4-3\sin^2\theta)} = -\dfrac{6g\cos\theta}{L(1+3\cos^2\theta)}$ เช่นเดียวกับสมการ(5)

3.ใช้จุด C (ติดไปกับวัตถุ)เป็นจุดอ้างอิง

จุด C มีความเร่งทั้งในแนวแกน x และแนวแกน y เราจึงใส่แรงเทียม ใส่แรงเทียม $-M\ddot{x}_C$ และ $-M\ddot{y}_C$ ที่ CM ดังรูป



ความเร่งของจุด C ในแนวแกน x หาได้จากว่า $x_C = \left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)$ หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาได้ $\dot{x}_A = -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta$ หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาอีกครั้ง จะได้ $\ddot{x}_C = -\frac{L}{2}\left\{\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right\}$

แต่ $\dot{\theta} = 0$ ดังนั้น $\ddot{x}_C = -\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta$

จากสมการ(2)ความเร่งของจุด C ในแนวแกน y คือ $\ddot{y}_C = L\ddot{\theta}\cos\theta = 2\ddot{y}_B$

ทอร์กเทียมที่อ้างอิงกับจุด C มีขนาด $M\ddot{x}_C\frac{L}{2}\sin\theta$ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ และ $M\ddot{y}_C\frac{L}{2}\cos\theta$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ

$$\therefore \quad \left(Mg + M\ddot{y}_C\right)\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) - M\ddot{x}_C\frac{L}{2}\sin\theta - NL\cos\theta = I_C\ddot{\theta} = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta}$$

แทน $\ddot{y}_C = 2\ddot{y}_B$ และ $N = Mg + M\ddot{y}_B$

$$\therefore \quad \left(Mg + 2M\ddot{y}_B\right)\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) - M\ddot{x}_C\frac{L}{2}\sin\theta - \left(Mg + M\ddot{y}_B\right)L\cos\theta = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta}$$

$$\therefore \quad -Mg\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) - M\ddot{x}_C\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta}$$

แทน $\ddot{x}_C = -\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta$; $\therefore \quad -g\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) + \ddot{\theta}\frac{L^2}{4}\sin^2\theta = \frac{1}{3}L^2\ddot{\theta}$

จะได้ $\ddot{\theta} = -\dfrac{6g\cos\theta}{L(4-3\sin^2\theta)} = -\dfrac{6g\cos\theta}{L(1+3\cos^2\theta)}$ เช่นเดียวกัน

<u>หมายเหตุ</u> นักศึกษาควรยึดการใช้ CM เป็นจุดอ้างอิง(วิธีที่ 1) เป็นหลัก เพราะเป็นวิธีที่มีโอกาสผิดพลาดน้อย

เมื่อรู้ $\ddot{\theta}$ แล้ว ต่อไปจะหาความเร่งในแนวดิ่งของจุด A,B และ C

เนื่องจากปลายซ้ายของท่อนไม้ไถลไปตามพื้น ดังนั้นความเร่งในแนวดิ่งของจุด A เป็นศูนย์

ความเร่งในแนวดิ่งของจุด B คือ $\ddot{y}_B = \dfrac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta = -\dfrac{3g\cos^2\theta}{(1+3\cos^2\theta)}$

คือขนาดเป็น $\dfrac{3g\cos^2\theta}{(1+3\cos^2\theta)}$ ทิศพุ่งลง

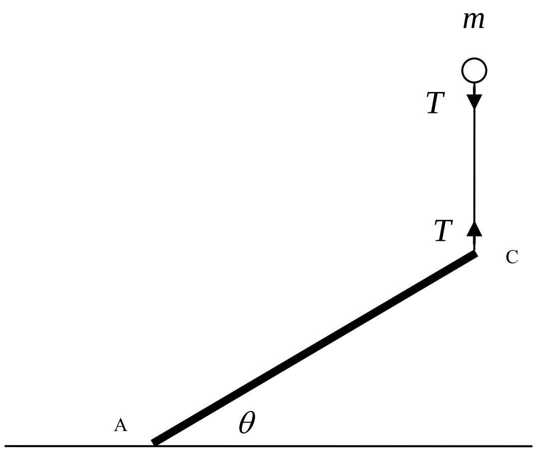
จากสมการ(2) ความเร่งในแนวดิ่งของจุด C คือ $\ddot{y}_C = L\ddot{\theta}\cos\theta = -\dfrac{6g\cos^2\theta}{(1+3\cos^2\theta)}$

คือขนาดเป็น $\dfrac{6g\cos^2\theta}{(1+3\cos^2\theta)}$ ทิศพุ่งลง

c) จุด C มีความเร่งมากที่สุด ดังนั้นเชือกทุกเส้นจะหย่อน ถ้า $\dfrac{6g\cos^2\theta}{(1+3\cos^2\theta)} < g$

หรือ $\cos\theta < \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ คือ $\theta > \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{1}{3}} \approx 54.7^0$

d) กรณี $\theta > 54.7^0$ เชือกเส้นแรกหย่อน เส้นกลางก็หย่อนเพราะ $\dfrac{3g\cos^2\theta}{(1+3\cos^2\theta)} < g$ มีแต่เส้นขวาสุดที่ผูกกับจุด C จะตึง ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

เมื่อพิจารณาการหมุนของท่อนไม้ เราจะเลือก CM (จุดB) เป็นจุดอ้างอิง

ทอร์กของแรงโน้มถ่วงเป็นศูนย์ ทอร์กของ N ขนาด $N\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)$ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ

ทอร์กของแรงตึงเชือกขนาด $T\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)$ ทิศพุ่งออกจากกระดาษ ดังนั้น

$$-N\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)+T\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)=I_{CM}\ddot{\theta}=\frac{1}{12}ML^2\ddot{\theta} \qquad (7)$$

ดูท่อนไม้แบบเลื่อนที่บ้าง ดูในแนวดิ่ง

$$N+T-Mg=M\,a_{CM,y}=M\,\ddot{y}_B$$

แทน $\ddot{y}_B$ ในสมการ (1) ลงไป จะได้

$$N+T-Mg=M\,\ddot{y}_B=M\left(\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta\right) \qquad (8)$$

ดูมวลก้อนที่สามบ้าง เนื่องจากเชือกตึง ความเร่งในแนวดิ่งของมวลก้อนที่สามเท่ากับของจุด C จะได้

$-T-mg=m\ddot{y}_C$ แทน $\ddot{y}_C=L\ddot{\theta}\cos\theta$ จากสมการ (2) ลงไป ได้

$$-T-mg=mL\ddot{\theta}\cos\theta \qquad (9)$$

จากสมการ(7) (8) และ(9) จะได้

$$\ddot{\theta} = -\frac{6g}{L}\frac{\left(1+2\frac{m}{M}\right)\cos\theta}{\left(1+3\cos^2\theta+12\frac{m}{M}\cos^2\theta\right)}$$

แทนในสมการ(2) ได้

$$\ddot{\theta} = -6g\frac{\left(1+2\frac{m}{M}\right)\cos^2\theta}{\left(1+3\cos^2\theta+12\frac{m}{M}\cos^2\theta\right)}$$

นั่นคือความเร่งของมวลก้อนขวามือสุดมีขนาดเป็น $6g\frac{\left(1+2\frac{m}{M}\right)\cos^2\theta}{\left(1+3\cos^2\theta+12\frac{m}{M}\cos^2\theta\right)}$ ทิศชี้ลง

ส่วนความเร่งของมวลอีกสองก้อนขนาดเป็น g ทิศชี้ลง

มองย้อนดูกว้างๆก่อนจะสรุป

มีปัญหาบางประเภท ตัวอย่างเช่นทรงกระบอกสม่ำเสมอกลิ้งลงมาจากพื้นเอียง เมื่อถึงพื้นราบความเร็วเป็นเท่าใด ปัญหาแบบนี้ไม่สามารถที่จะแก้ได้โดยใช้เฉพาะกฎการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ ดังนั้นจึงต้องขยับขยายกฎการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่โดยใช้เวกเตอร์และแคลคูลัสเข้าช่วย เพื่อให้ได้ความสัมพันธ์ที่นำมาใช้ประโยชน์ได้ ตัวอย่างเช่นเราได้ว่า $\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$ เป็นต้น

ในการใช้เวกเตอร์นั้นเราใช้องค์ประกอบของเวกเตอร์ การแตกเวกเตอร์ การแตกเวกเตอร์ใช้ร่วมกับพิกัดฉาก และพีชคณิตของเวกเตอร์(1.การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ 2.การบวกเวกเตอร์ 3.dot product 4.cross product) ส่วนการใช้แคลคูลัสนั้นก็เป็นแค่แบบง่ายๆ แต่มักจะต้องดูความหมายของมัน ตัวอย่างเช่นหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ตำแหน่งจะได้ความเร็ว หาอนุพันธ์ของความเร็วได้ความเร่ง การอินทิเกรตในความหมายของการรวมส่วนย่อย เป็นต้น ในเชิงเทคนิคนั้นการหาอนุพันธ์มักไม่เป็นปัญหาเพราะมันง่าย ส่วนเทคนิคของการอินทิเกรตนั้นเราใช้เพียงเทคนิคง่ายๆเป็นเพียงเสี้ยวเดียวของที่นักศึกษาได้เรียนในคณิตศาสตร์ จริงหรือไม่จริง นักศึกษาลองย้อนไปพิจารณาเอกสารนี้ทีละหน้าๆ เมื่อไปเป็นครูจะมีข้อจำกัดเรื่องเวลาในการสอนจะได้ปรับการสอนให้ตรงประเด็นขึ้น

สรุป

1.กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองแบบหมุน

เริ่มจากการนิยามทอร์กที่กระทำต่ออนุภาค $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

และนิยามต่อว่าทอร์กของแรงภายนอกระบบที่กระทำต่อระบบอนุภาคคือผลรวมของทอร์กของแรงภายนอกระบบที่กระทำต่ออนุภาคแต่ละตัว คือ $\vec{\tau} = \sum_{\upsilon=1}^{N} \vec{r}_\upsilon \times \vec{F}_\upsilon^{ext}$

นิยามโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาค $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ โมเมนตัมเมื่อ $\vec{P} = m\vec{v}$ คือโมเมนตัมเชิงเส้น

และนิยามต่อว่าโมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาคคือผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคแต่ละตัว คือ $\vec{L} = \sum_{\upsilon=1}^{N} \vec{r}_\upsilon \times \vec{P}_\upsilon$

เมื่อใช้พีชคณิตของเวกเตอร์ผสมกับแคลคูลัส และใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองแบบเลื่อนที่ด้วย จะได้ความสัมพันธ์ว่า สำหรับจุดอ้างอิง Q ใดๆ จะมีความเร่งหรือไม่ก็ได้

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_Q = \vec{\tau}_Q + (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q) \times (-M\ddot{\vec{r}}_Q) \qquad \text{(ส.1)**}$$

คืออัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม เท่ากับทอร์กจริง $\vec{\tau}_Q$ บวกทอร์กเทียม $(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q) \times (-M\ddot{\vec{r}}_Q)$

โดยทั่วไปแล้วนิยมเลือกจุดอ้างอิงที่ทำให้ทอร์กเทียมเป็นศูนย์ คือ

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \text{(ส.2)**}$$

สมการนี้มีเงื่อนไขคือ จุดอ้างอิงที่ใช้คำนวณทอร์กและโมเมนตัมเชิงมุม(เป็นจุดเดียวกัน) จะต้อง 1. ไม่มีความเร่ง หรือ 2.มีความเร่งก็ได้ถ้าเป็นจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค หรือ 3.ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้ามีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกผ่านจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค

สมการ(ส2) ใช้ได้ทั้งกับวัตถุแข็งเกร็ง ทั้งกับระบบอนุภาค อย่างไรก็ตามสมการ(ส.2)ไม่เหมาะนักสำหรับวัตถุแข็งเกร็งจึงต้องหาสมการที่เหมาะๆสำหรับวัตถุแข็งเกร็ง

เมื่อวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนๆหนึ่งด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ อาจมองได้ว่าวัตถุนี้หมุนรอบแกนอื่นๆอีกนับไม่ถ้วนที่ติดไปกับวัตถุและขนานกับแกนเดิม โดยหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ เดียวกัน ถ้าเรากำหนดจุดๆหนึ่งบนวัตถุแข็งเกร็ง(อยู่ตรงไหนก็ได้)และให้จุดนี้เป็นจุดกำเนิดของเวกเตอร์ตำแหน่ง จุดอื่นๆบนวัตถุแข็งเกร็งซึ่งมีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็น $\vec{r}$ จะมีความเร็วอ้างอิงกับจุดกำเนิดเป็น $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ดังนั้นมวลเล็กๆ dm ที่มีเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}$ จึงมีโมเมนตัมเชิงมุมอ้างอิงกับจุดกำเนิดเป็น $\vec{r} \times (\vec{v}\, dm) = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dm$ เมื่อรวม(ด้วยการอินทิเกรต)ให้ทั่วทั้งก้อนวัตถุก็จะได้โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุอ้างอิงกับจุดกำเนิด องค์ประกอบ x , y และ z ของโมเมนตัมเชิงมุมเราจะจำได้ง่ายถ้าจำในรูปของเมตริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (ส.3)$$

โดย $I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$, $I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$, $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$ พจน์ทั้งสามนี้เรียกว่า moments of inertia และอีกหกพจน์คือ $I_{xy} = I_{yx} = \int -x\,y\,dm$, $I_{xz} = I_{zx} = \int -xzdm$, และ $I_{yz} = I_{zy} = \int -yzdm$ เรียกว่า products of inertia

พึงระลึกว่าโมเมนตัมเชิงมุมในสมการ (ส3) นี้อ้างอิงกับจุดกำเนิดซึ่งติดไปกับวัตถุ

ในกรณีการหมุนในระนาบทิศของความเร็วเชิงมุมอยู่ในแนวเดิมตลอด ถ้าเราให้ทิศนี้อยู่ในแนวแกน z จะไม่มีองค์ประกอบของความเร็วเชิงมุมในแนว x และ y สมการ (ส.3) จะเป็น

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \qquad (ส.4)^{**}$$

หรือก็คือ $\vec{L} = I_{xz}\omega\hat{i} + I_{yz}\omega\,\hat{j} + I_{zz}\omega\hat{k}$

ทิศของโมเมนตัมเชิงมุมกับทิศของความเร็วเชิงมุมอาจเป็นคนละทิศ ขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมอาจไม่เท่ากับ $I\omega$ แต่องค์ประกอบของโมเมนตัมเชิงมุมในแนวของความเร็วเชิงมุม จะเท่ากับ $I\omega$ เสมอ

ถ้าเราให้จุดกำเนิดของพิกัด xyz ในสมการ(ส.4) เป็นดังนี้ คือ 1.ไม่มีความเร่ง หรือ 2.มีความเร่งก็

ได้ถ้าเป็นจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ หรือ 3.ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้ามีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ เราก็สามารถใช้ความสัมพันธ์ $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt}$ ได้ ซึ่งเมื่อดูในแต่ละองค์ประกอบ จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= I_{xz}\alpha - I_{yz}\ \omega^2 \\ \tau_y &= I_{yz}\alpha + I_{xz}\ \omega^2 \\ \tau_z &= I_{zz}\alpha \end{aligned}\right\}$$

แต่สำหรับปัญหาอย่างง่ายในระดับมัธยมหรือฟิสิกส์ทั่วไป 1 ของมหาวิทยาลัย ปัญหาจะเป็นปัญหาที่ใช้เพียงแค่สมการสุดท้าย $\tau_z = I_{zz}\alpha$ ก็ได้คำตอบแล้ว เรานิยมเขียนสมการนี้สั้นๆเป็น

$$\tau = I\ \alpha \qquad (ส.5)^{**}$$

สมการนี้ถือเป็นสมการหลักที่ใช้แก้ปัญหาการหมุนในระดับมัธยมและฟิสิกส์ทั่วไป1 บางครั้งเรียกว่ากฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองแบบหมุนในระนาบ มันใช้ได้เฉพาะการหมุนในระนาบที่จุดใดๆบนวัตถุจะเคลื่อนที่ในระนาบหนึ่ง(หรือทิศของความเร็วเชิงมุมอยู่ในแนวเดิมตลอด) แกนอ้างอิงที่ใช้คำนวณโมเมนต์ความเฉื่อย I เป็นแกนที่อยู่ในแนวของความเร็วเชิงมุมและผ่านจุดอ้างอิง โดยจุดอ้างอิงจะต้องเป็นจุดที่ติดไปกับวัตถุ และ1.ไม่มีความเร่ง หรือ 2.มีความเร่งก็ได้ถ้าเป็นจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ หรือ 3.ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้ามีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ

ทอร์ก τ ในสมการ (ส5) นั้น เป็นองค์ประกอบของทอร์กในแนวความเร็วเชิงมุม(แนวแกน z) ซึ่งเป็นการเหมาะมากที่เราจะฉาย (project) ทั้งวัตถุทั้งแรงลงบนระนาบของกระดาษเพื่อใช้ในการคำนวณทอร์ก

แทนที่จะใช้จุดอ้างอิงที่ติดไปกับวัตถุ เราอาจใช้จุดอ้างอิงตรึงตรึงก็ได้ โมเมนตัมเชิงมุมเมื่ออ้างอิงกับจุดอ้างอิงตรึง คือ

$$\bar{L}_{fixed} = \bar{L}_{orbit} + \bar{L}_{spin} \qquad (ส6)$$

เมื่อใช้จุดอ้างอิงตรึง เราก็ใช้สมการ $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt}$ ได้โดยตรง

2 งาน-พลังงาน

ไม่ว่าวัตถุจะหมุนรอบแกนตรึงหรือไม่ก็ตาม พลังงานจลน์ของมันเขียนได้เป็น

$$E_k = \frac{1}{2} M\, v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 \qquad \text{(ส7)**}$$

ถ้าวัตถุหมุนรอบแกนตรึง(หรือแกนที่อยู่นิ่งชั่วขณะ) พลังงานจลน์ของมันเขียนได้เป็น

$$E_k = \frac{1}{2} I\, \omega^2 \qquad \text{(ส8)**}$$

สำหรับการหมุนรอบแกนตรึง จะได้ว่า

$$W = \int_i^f \tau\, d\theta = \frac{1}{2} I\ \omega_f^2 - \frac{1}{2} I\ \omega_i^2 = \Delta E_k \qquad \text{(ส9)**}$$

สำหรับการหมุนรอบแกนไม่ตรึง จะได้ว่า

$$W_{CM}^{trans} + W_{CM}^{rot} = \Delta E_k \qquad \text{(ส10)}$$

3.การดลเชิงมุม-โมเมนตัมเชิงมุม

สำหรับจุดอ้างอิงตรึง หรือจุดอ้างอิงที่เป็นจุดศูนย์กลางมวล จาก การดลเชิงมุม = โมเมนตัมเชิงมุมที่เปลี่ยนไป ถ้าดูในแนวของความเร็วเชิงมุม จะได้ว่า

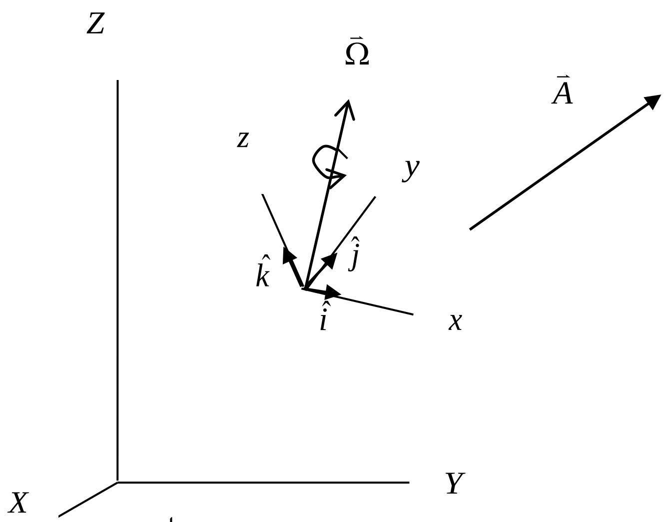
$$\int_i^f \tau_z\, dt = (\Delta L)_z \qquad \text{(ส11)**}$$

ถ้า τ_z เป็นศูนย์ จะได้โมเมนตัมเชิงมุมในแนว z คงที่ หรือก็คือ $I\omega$ คงที่ นั่นเอง

ภาคผนวก ก.

ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่งและผู้สังเกตที่หมุน

ให้พิกัด xyz เป็นพิกัดที่หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\vec{\Omega}$ เทียบกับพิกัด XYZ ที่อยู่นิ่ง ดังรูป ก.1



รูป ก.1

โดย $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยของพิกัด XYZ และ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยของพิกัด xyz

ให้ $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\bar{A}$ ในองค์ประกอบของพิกัด XYZ หรือ xyz ก็ได้ได้เป็น

$$\bar{A} = A_X \hat{I} + A_Y \hat{J} + A_Z \hat{K} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

เมื่อ A_X, A_Y และ A_Z เป็นองค์ประกอบของ $\bar{A}$ ในแนว $\hat{I}, \hat{J}$ และ $\hat{K}$ ตามลำดับ

(นักศึกษาสังเกตว่าตัวห้อย X, Y และ Z นั้น เขียนด้วยตัวใหญ่)

และ A_x, A_y และ A_z เป็นองค์ประกอบของ $\bar{A}$ ในแนว $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ ตามลำดับ

(นักศึกษาสังเกตว่าตัวห้อย x, y และ z นั้น เขียนด้วยตัวเล็ก)

อนุพันธ์เทียบกับเวลาของ $\bar{A}$ เขียนได้เป็น

$$\dot{\bar{A}} = \dot{A}_X \hat{I} + \dot{A}_Y \hat{J} + \dot{A}_Z \hat{K} \qquad (ก.1)$$

หรือ $$\dot{\bar{A}} = \dot{A}_x \hat{i} + \dot{A}_y \hat{j} + \dot{A}_z \hat{k} + A_x \dot{\hat{i}} + A_y \dot{\hat{j}} + A_z \dot{\hat{k}} \qquad (ก.2)$$

ทั้งนี้เพราะเวกเตอร์หน่วย $\hat{I}, \hat{J}$ และ $\hat{K}$ คงที่ แต่ $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ ไม่คงที่ เพราะแม้ขนาดยังคงเท่ากับหนึ่งหน่วยแต่ทิศทางเปลี่ยน จึงไม่ใช่เวกเตอร์เดิม

ทั้งสมการ(ก.1) และ(ก.2) เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\bar{A}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง(กรอบอ้างอิงเฉื่อย) เราจะเขียนให้ชัดเจนว่า $\left(\dot{\bar{A}}\right)_{fixed}$ แต่สมการที่เราสนใจคือสมการ(ก.2) ซึ่งจะเขียนใหม่เป็น

$$\left(\dot{\bar{A}}\right)_{fixed} = \dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k} + A_x\dot{\hat{i}} + A_y\dot{\hat{j}} + A_z\dot{\hat{k}} \qquad (ก.3)$$

ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับนั้นแบ่งได้เป็น 2 กลุ่ม คือ $\dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k}$ และ $A_x\dot{\hat{i}} + A_y\dot{\hat{j}} + A_z\dot{\hat{k}}$ เราจะดูความหมายของกลุ่มแรกก่อน

$\dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k}$ <u>ซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\bar{A}$ เมื่อถือว่าเวกเตอร์หน่วย $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ คงที่</u> เราอาจมองความหมายได้ 2 อย่าง อย่างแรกเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\bar{A}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่ติดไปกับพิกัด xyz ซึ่งจะเห็น $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ คงที่ (มักเรียกว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงสังเกตโดยผู้สังเกตที่หมุน อย่างไรก็ตามในกรณีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเชิงมุม การเรียกเช่นนี้อาจมีปัญหา นักศึกษาอ่านเพิ่มเติมได้ใน Lecture Notes on Classical Mechanics for Physics 106ab ในเว็บ astro.caltech.edu เขียนโดย Sunil Golwala) อย่างที่สองอาจมองว่าเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของ $\bar{A}$ เมื่อถือว่า $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ คงที่ เราจะเขียน $\dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k}$ ว่า $\left(\dot{\bar{A}}\right)_{rot}$ คือ

$$\left(\dot{\bar{A}}\right)_{rot} = \dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k} \qquad (ก.4)$$

{**<u>อ.ในภาค</u>** ปกติแล้วหนังสือต่างๆมักมองกันว่ามันคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\bar{A}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่หมุน แต่มันมีปัญหาตรงที่ถ้า $\bar{A}$ คือความเร็วเชิงมุม $\bar{\Omega}$ แล้ว ผู้สังเกตที่หมุนไม่น่าจะสังเกตเห็น $\dot{\bar{\Omega}}$ เมื่อก่อนผมก็ไม่ได้ฉุกคิด ก็ว่าตามหนังสือที่เคยอ่าน แต่ขณะที่เขียนเอกสารนี้จวนจะเสร็จก็ได้อ่าน Lecture Notes on Classical Mechanics for Physics 106ab ในเว็บ astro.caltech.edu เขียนโดย Sunil Golwala (อ่านนิดเดียว ไม่ใช่ทั้งเล่ม) เขาวิจารณ์สมการ $\left(\dot{\bar{\Omega}}\right)_{fixe} = \left(\dot{\bar{\Omega}}\right)_{rot} + \bar{\Omega}\times\bar{\Omega} = \left(\dot{\bar{\Omega}}\right)_{rot}$ ว่าบอกว่ามันเป็นเรื่องตลกมากที่หนังสือบอกว่า ผู้สังเกตที่หมุนสังเกตเห็น $\dot{\bar{\Omega}}$ เหมือนกับผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง นึกๆดูซึ่งมันก็จริงของเขา อย่างไรก็ตามผมอ่านคณิตศาสตร์ที่เขาใช้ไม่เข้าใจ

ผมว่าจะแปลความหมายอย่างไรก็แล้วแต่ ที่แน่ๆคือ $\dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงเมื่อถือว่า $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ คงที่

ถ้า $\bar{A}$ เป็นเวกเตอร์อื่นที่ไม่ใช่ $\bar{\Omega}$ การมองว่า $\dot{A}_x\hat{i} + \dot{A}_y\hat{j} + \dot{A}_z\hat{k}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงที่สังเกตโดยผู้สังเกตที่หมุน จะไม่มีปัญหาเรื่องความหมาย แต่ถ้า $\bar{A}$ เป็น $\bar{\Omega}$ แล้วมันชักจะยุ่ง ผมจึงใส่ความหมายที่สองคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของ $\bar{A}$ เข้าไปด้วย ซึ่งความหมายนี้ก็เอามาจากคนอื่นนั่นแหละ แต่จำไม่ได้ว่าเป็นใคร ถ้าดูจากความหมายนี้แล้วผมคิดว่า $\left(\dot{\bar{\Omega}}\right)_{fixe} = \left(\dot{\bar{\Omega}}\right)_{rot}$ น่าจะไม่มีปัญหา

หลังจากที่ได้ฟังความเห็นของ Sunil Golwala ทำให้ผมกลับมาทบทวนการใช้คำว่า “ผู้สังเกต” “สัมพัทธ์กับ” “อ้างอิงกับ” ที่เมื่อก่อนผมอาจใช้สลับกันไปมาโดยไม่ได้คิดอะไรมาก คำว่า “ผู้สังเกต” น่าจะใช้กับการที่สามารถวัดได้ ตัวอย่างเช่นนายดำนั่งบนเก้าอี้ในรถไฟ ส่วนนายแดงกำลังเดินบนรถไฟ นายดำ “สังเกต” เห็นนายแดงมีความเร็ว 1 เมตร/วินาที คือถ้าให้ตลับเมตร นาฬิกาจับเวลา แก่นายดำ เขาวัดการกระจัดของนายแดงได้ คำนวณความเร็วได้จริงๆ

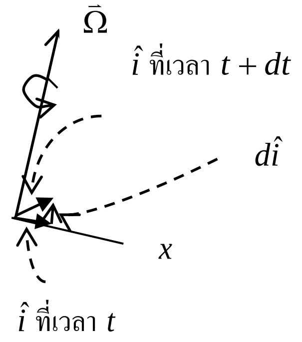
คราวนี้ลองจินตนาการให้นายดำและนายแดงตัวเล็กๆ ทั้งคู่อยู่นิ่งบนเข็มวินาทีของนาฬิกา แต่อยู่ตำแหน่งที่ต่างกัน เราซึ่งอยู่นิ่งนอกเข็มนาฬิกา รู้ว่าความเร็วของคนทั้งสองไม่เท่ากัน แต่นายดำไม่สามารถวัดความเร็วของนายแดงได้ เขาบอกว่านายแดงก็อยู่นิ่งเหมือนเขานั้นแหละ (ถ้าวัดได้เราซึ่งอยู่เชิงเขาก็คงวัดความเร็วของยอดเขาได้ เพราะโลกหมุน คนที่อยู่นิ่งนอกโลกเห็นความเร็วของยอดเขามากกว่าของเชิงเขา) ดังนั้นในกรณีนี้ไม่ควรใช้คำว่า “สังเกต” แต่ควรใช้คำว่า “สัมพัทธ์กับ” หรือ “อ้างอิงกับ”

แต่ผมไม่ทบทวนก่อนส่งให้ อ.ดุจดาวตรวจทาน เพราะถ้าแก้คำพูดไปแล้วมันก็งั้นๆแหละ ไม่เห็นความสำคัญของมัน ถ้าเล่าให้ฟังเหมือนเล่านิทานผมว่ามันทำให้สนุกขึ้น แต่ได้แก้การใช้คำพูดหลังจากส่งให้อาจารย์ดุจดาวแล้ว

อีกอย่างคืออยากจะบอกว่ามีหลายครั้งที่เรามองจากมุมเดียว ไม่เห็นมุมอื่น ถ้ามีคนสะกิดเราสักหน่อย เราก็จะได้คิด }

คราวนี้มาดูความหมายของกลุ่มที่สองคือ $A_x\dot{\hat{i}} + A_y\dot{\hat{j}} + A_z\dot{\hat{k}}$ กันบ้าง จะเห็นว่ามันคืออัตราการเปลี่ยนแปลงที่มาจากการหมุนของแกน xyz

เราจะหา $\dot{\hat{i}}$ ซึ่งคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\hat{i}$ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง กันก่อน



รูป ก.2

จากรูป ก.2 จากเดิมที่เวลา t เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นเล็กน้อย dt เวกเตอร์หน่วย $\hat{i}$ จะเปลี่ยนไปเล็กน้อย คือ $d\hat{i}$ ในรูป พิจารณาดูจะเห็นว่า

ขนาดของ $d\hat{i}$ = (รัศมีการกวาดรอบแกนหมุน) คูณ (ความเร็วเชิงมุม) คูณ (เวลาที่เปลี่ยนไป)

ถ้าให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{\Omega}$ กับ $\hat{i}$ จะได้

ขนาดของ $d\hat{i} = \left(\left|\hat{i}\sin\theta\right|\right)\left(\left|\vec{\Omega}\right|\right) dt = \left|\vec{\Omega}\times\hat{i}\right| dt$

และเมื่อพิจารณาดูจากรูปก.2 นักศึกษาจะเห็นว่าทิศของ $d\hat{i}$ อยู่ในทิศของ $\vec{\Omega}\times\hat{i}$

นั่นคือ $d\hat{i} = \vec{\Omega}\times\hat{i} \quad dt$

หรือ $$\frac{d\hat{i}}{dt} = \dot{\hat{i}} = \vec{\Omega}\times\hat{i} \qquad \text{(ก.5a)}$$

ทำนองเดียวกัน จะได้ $$\dot{\hat{j}} = \vec{\Omega}\times\hat{j} \qquad \text{(ก.5b)}$$

และ $$\dot{\hat{k}} = \vec{\Omega}\times\hat{k} \qquad \text{(ก.5c)}$$

จากสมการ ก.5 a,b และ c ดังนั้น

$$A_x\dot{\hat{i}} + A_y\dot{\hat{j}} + A_z\dot{\hat{k}} = A_x\vec{\Omega}\times\hat{i} + A_y\vec{\Omega}\times\hat{j} + A_z\vec{\Omega}\times\hat{k} = \vec{\Omega}\times(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$$

หรือ $$A_x\dot{\hat{i}} + A_y\dot{\hat{j}} + A_z\dot{\hat{k}} = \vec{\Omega}\times\vec{A} \qquad \text{(ก.6)}$$

จากสมการ ก.4 และ ก.6 สมการ ก.3 จะกลายเป็น

$$\left(\dot{\bar{A}}\right)_{fixed} = \left(\dot{\bar{A}}\right)_{rot} + \bar{\Omega}\times\bar{A} \qquad (\text{ก.7})^{**}$$

สมการ ก.7 เป็นสมการที่เราจะนำไปใช้ สมการนี้บอกว่า *อัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์* $\bar{A}$ *ใดๆ สังเกตโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง จะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์* $\bar{A}$ *สังเกตโดยผู้สังเกตที่หมุน(หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของ* $\bar{A}$ *เมื่อถือว่า* $\hat{i}, \hat{j}$ และ $\hat{k}$ คงที่ *) บวกกับ* $\bar{\Omega}\times\bar{A}$

(นักศึกษาควรจำทั้งรูปของสมการ ก.7 และคำบรรยาย ส่วนการพิสูจน์ดูให้เข้าใจสักครั้งก็พอ)

ภาคผนวก ข.

สมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์

(Euler's equations of motion หรือ Euler's rotation equations)

นักศึกษาที่ไม่เรียนหลักสูตร วท.บ ฟิสิกส์ หรือวิศวกรรมศาสตร์ สามารถข้ามภาคผนวก ข.นี้ได้

สมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์ถือได้ว่าเป็นสมการหลักที่ใช้แก้ปัญหาการหมุนทั้งทางฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์ แม้สมการนี้จะเกินขอบเขตการศึกษาของนักศึกษาครู แต่แนวทางที่เราใช้หาสมการ $\tau = I\alpha$ สามารถหาสมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์ได้ไม่ยาก ดังจะเห็นในภาคผนวก ข. นี้

จากหัวข้อ 1.3.3.2 เราได้ว่าสำหรับแกน xyz ใดๆที่ติดไปกับวัตถุที่หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\bar{\omega}$ ความเร็วเชิงมุมอ้างอิงเทียบกับจุดกำเนิดของแกน xyz นี้ สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังสมการ 1.3.7 คือ

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (1.3.7)$$

โดย I_{xx}, , I_{yy} และ I_{zz} เรียกว่า moments of inertia

$I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, และ $I_{yz} = I_{zy}$ เรียกว่า products of inertia

จะเห็นว่ามันดูรุงรัง ตัวอย่างเช่นเมื่อเราคูณเมตริกซ์ออกมาแล้วดูองค์ประกอบของโมเมนตัมเชิงมุมในแนวแกน x จะได้ $L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$ ถ้าดู L_yและ L_z ก็จะคล้ายกัน แกน xyz นี้จึงไม่เหมาะในการใช้งาน ในทางปฏิบัติเราจะใช้แกนที่ products of inertia ทั้งหกพจน์มีค่าเป็นศูนย์ แกนที่มี

สมบัติเช่นนี้เรียกว่า “แกนหลัก” นอกจากนี้แล้วแกนหลักยังมีสมบัติเฉพาะหลายอย่างแต่ในที่นี้เราจะไม่กล่าวถึงสมบัติเหล่านี้

1.แกนหลักของวัตถุแข็งเกร็ง (Principal Axes of a Rigid Body)

แกนหลักของวัตถุแข็งเกร็งคือแกน xyz ที่ products of inertia ทั้งหกพจน์มีค่าเป็นศูนย์ มีแต่ moments of inertia การหาแกนหลักของวัตถุนั้นในเชิงทฤษฎีถ้าเราตรึงจุดกำเนิดของพิกัด xyz ให้ติดกับวัตถุที่ตำแหน่งใดก็ได้ จากนั้นก็เอียงแกนไปมาพร้อมกับหมุนแกนทางโน้นทางนี้โดยให้จุดกำเนิดตรึงอยู่ที่เดิม จะพบว่าเมื่อแกนวางตัวในลักษณะที่พอเหมาะจะทำให้ products of inertia ทั้งหกพจน์มีค่าเป็นศูนย์ เหลือแต่ moments of inertia แต่ในทางปฏิบัติเรามักหาแกนหลักจากสมมาตรของรูปร่างวัตถุ ถ้าวัตถุมีสมมาตรเราจะเลือกให้ระนาบอย่างน้อยสองระนาบ(จากสามระนาบ)ของแกนแบ่งวัตถุให้สมมาตร ตัวอย่างเช่นถ้าให้ระนาบ xy แบ่งวัตถุออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆกัน อินทิกรัลที่มี z อยู่ซึ่งประกอบด้วย $I_{xz}, I_{zx}, I_{yz}, I_{zy}$ จะเป็นศูนย์ทั้งหมด และถ้าให้ระนาบ xz แบ่งวัตถุออกเป็น 2 ส่วนเท่าๆกัน อินทิกรัลที่มี y อยู่ซึ่งประกอบด้วย $I_{xy}, I_{yx}, I_{yz}, I_{zy}$ จะเป็นศูนย์ทั้งหมด ดังนั้น products of inertia ทั้งหกพจน์มีค่าเป็นศูนย์

เรานิยมใช้เลข 1, 2 และ3 เพื่อบ่งบอกว่าเป็นแกนหลัก ดังนั้นเมื่อใช้แกนหลักความสัมพันธ์ในสมการ 1.3.7 จะเป็น

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \qquad (\text{ข}.1)^{**}$$

หรืออาจเขียนเป็น

$$\vec{L} = I_1\omega_1\hat{e}_1 + I_2\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3 \qquad (\text{ข}.2)$$

เมื่อ $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ และ $\hat{e}_3$ คือเวกเตอร์หน่วยของแกน 1 , 2 และ 3 ตามลำดับ และ ω_1, ω_2 และ ω_3 คือองค์ประกอบของความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ ในแนว 1 , 2 และ 3 ตามลำดับ

2. การหาสมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์

จากหัวข้อ 2.1 เรารู้ว่า $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt}$ มีเงื่อนไขคือ1.จุดอ้างอิงต้องไม่มีความเร่ง หรือ2.มีความเร่งก็ได้ถ้าเป็นศูนย์กลางมวล หรือ3.ไม่ใช่ศูนย์กลางมวลก็ได้ถ้ามีความเร่งพุ่งเข้าหรือออกผ่านศูนย์กลางมวล นอกจากนี้อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุม $\dfrac{d\bar{L}}{dt}$ ต้องอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย

ดังนั้นเราจะเลือกจุดกำเนิดของแกน 123 ซึ่งเป็นแกนหลักให้สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสามข้อ เพื่อที่จะใช้สมการ $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt}$ ได้ แกนนี้เป็นแกนที่ติดไปกับวัตถุเพื่อให้ moments of inertia ไม่เปลี่ยนแปลงกับเวลาเมื่อวัตถุหมุน และเพื่อให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงมุมอ้างอิงกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย เราจะใช้สมการ (ก7) ในภาคผนวก ก. คือ

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{rot} + \bar{\omega}\times\bar{L} \qquad (ข.3)$$

จากสมการ (ข.2) โมเมนตัมเชิงมุมเขียนได้เป็น $\bar{L} = I_1\omega_1\hat{e}_1 + I_2\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3$ ดังนั้น $\left(\dfrac{d\bar{L}}{dt}\right)_{rot} = I_1\dot{\omega}_1\hat{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\hat{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3$ ส่วนพจน์ $\bar{\omega}\times\bar{L}$ เมื่อเขียนเป็นองค์ประกอบในแนว 1,2,3 คือ $(\omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3)\times(I_1\omega_1\hat{e}_1 + I_2\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3)$ หลังจากที่ cross แล้วจัดพจน์ สมการ(ข.3) จะเป็นดังนี้

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fixed} = \{I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3\}\hat{e}_1 + \{I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3\}\hat{e}_2$$
$$+\{I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2\}\hat{e}_3$$

แต่ $\left(\dfrac{d\bar{L}}{dt}\right)_{fixed} = \bar{\tau}$ ดังนั้นเมื่อดูในแต่ละองค์ประกอบจึงเขียนได้ว่า

$$\left.\begin{aligned}\tau_1 &= I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\ \omega_2\omega_3\\ \tau_2 &= I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\ \omega_1\omega_3\\ \tau_3 &= I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\ \omega_1\omega_2\end{aligned}\right\} \qquad (ข.4)^{**}$$

สมการข.4 เรียกว่าสมการการเคลื่อนที่ของออยเลอร์ เป็นสมการที่บรรยายการหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง แม้ไม่ใช่การหมุนในระนาบสมการนี้ก็ใช้ได้ สมการนี้เป็นสมการที่ใช้แกนที่เรียกว่าแกนหลัก (principal axes) ซึ่งติดไปกับวัตถุ เนื่องจากสมการนี้ได้มาจากสมการ $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt}$ จึงต้องมีเงื่อนไขของ

จุดอ้างอิง(จุดกำเนิด)ทั้งสามข้อตามมาด้วย แต่เรานิยมเลือกเงื่อนไขเพียง 2 ข้อแรกคือ 1.เป็นจุดตรึง หรือ 2. เป็นจุดศูนย์กลางมวล

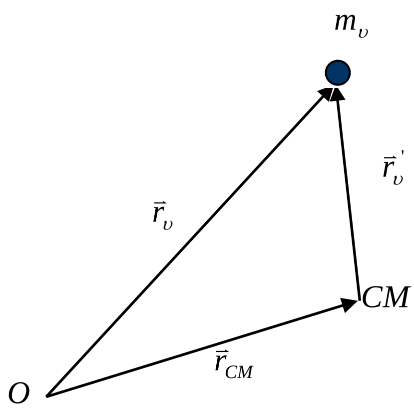
ภาคผนวก ค.

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งที่หมุนในระนาบ อ้างอิงกับจุดตรึงที่อยู่ภายนอกวัตถุ

เพื่อความสะดวกจะพิจารณาวัตถุแข็งเกร็งเป็นระบบอนุภาคที่ระยะห่างระหว่างอนุภาคคงที่ รูป ค. 1 เป็นระบบอนุภาคแต่เพื่อความชัดเจนเราจึงเขียนอนุภาคเพียงแค่ตัวเดียว คือตัวที่ υ

ให้ O เป็นจุดกำเนิดที่อยู่นิ่ง (จุดตรึง)

พิจารณาอนุภาคตัวที่ υ ซึ่งมีมวล m_υ



รูป ค. 1

$\vec{r}_\upsilon$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวลตัวที่ υ

$\vec{r}_{CM}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบอ้างอิงกับจุด O ที่อยู่นิ่ง

$\vec{r}_\upsilon'$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ υ อ้างอิงกับจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาคนี้

จากรูป $\vec{r}_\upsilon = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_\upsilon'$ หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้ $\vec{v}_\upsilon = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_\upsilon'$

โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคตัวที่ υ อ้างอิงเทียบกับจุด O $= \vec{r}_\upsilon \times m_\upsilon \vec{v}_\upsilon$

$$= (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_\upsilon') \times m_\upsilon (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_\upsilon') = m_\upsilon (\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_\upsilon' + \vec{r}_\upsilon' \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_\upsilon' \times \vec{v}_\upsilon')$$

ดังนั้น โมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาค อ้างอิงกับจุด O ซึ่งเป็นจุดตรึง

$$\vec{L}_{fixed} = \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} (\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{v}'_{\upsilon} + \vec{r}'_{\upsilon} \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}'_{\upsilon} \times \vec{v}'_{\upsilon})$$

$$= \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}_{CM} \times \vec{v}'_{\upsilon} + \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}'_{\upsilon} \times \vec{v}_{CM} + \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}'_{\upsilon} \times \vec{v}'_{\upsilon}$$

$$= \vec{r}_{CM} \times M\, \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \{\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{v}'_{\upsilon}\} + \{\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}'_{\upsilon}\} \times \vec{v}_{CM} + \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}'_{\upsilon} \times \vec{v}'_{\upsilon} \qquad \text{(ค.1)}$$

เมื่อ $M = \sum_{\upsilon} m_{\upsilon}$ คือมวลทั้งหมดของระบบอนุภาค

จากสมการ 4 และสมการ 5 (ก่อนจะขึ้นหัวข้อ1) $\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}'_{\upsilon} = 0$ และ $\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{v}'_{\upsilon} = 0$

ดังนั้น สมการ (ค.1) จะเหลือเพียง $\vec{L}_{fixed} = \vec{r}_{CM} \times M\, \vec{v}_{CM} + \sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}'_{\upsilon} \times \vec{v}'_{\upsilon}$ (ค.2)**

จะเห็นว่า<u>โมเมนตัมเชิงมุมประกอบด้วยสองส่วน ส่วนที่หนึ่งคือ $\vec{r}_{CM} \times M\, \vec{v}_{CM}$ นั้นเป็นโมเมนตัมเชิงมุมที่คิดได้คล้ายกับว่ามวลทั้งหมดไปอัดที่จุดศูนย์กลางมวล ส่วนที่สองคือ $\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}'_{\upsilon} \times \vec{v}'_{\upsilon}$ เป็นโมเมนตัมเชิงมุมอ้างอิงกับจุดศูนย์กลางมวล</u>

ในกรณี<u>การหมุนในระนาบอย่างง่าย</u>ที่เราสนใจ (คือ $I_{xz} = I_{yz} = 0$) จะได้ว่า $\sum_{\upsilon} m_{\upsilon} \vec{r}'_{\upsilon} \times \vec{v}'_{\upsilon} = I_{CM} \vec{\omega}$ ดังนั้น สมการ (ค.2) จะเป็น

$$\vec{L}_{fixed} = \vec{r}_{CM} \times M\, \vec{v}_{CM} + I_{CM}\, \vec{\omega} \qquad \text{(จุดอ้างอิงตรึง)} \qquad \text{(ค.3)}$$

หรืออาจเขียนเป็น $\vec{L}_{fixed} = \vec{L}_{orbit} + \vec{L}_{spin}$ (ค.4)**

เมื่อ $\vec{L}_{orbit} = \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM}$ เป็นโมเมนตัมเชิงมุมเนื่องจากวงโคจร ส่วน $\vec{L}_{spin} = I_{CM} \vec{\omega}$ เป็นโมเมนตัมเชิงมุมเนื่องจากการหมุนรอบตัวเองรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

(นักศึกษาควรจำในรูปของสมการ ค.4 เพราะมันลืมยาก)

เนื่องจากเป็นจุดตรึง เราจึงใช้สมการ $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ ได้ จึงเป็นวิธีแก้ปัญหาการหมุนอีกวิธีหนึ่ง (ดูตัวอย่างในหัวข้อ 5) แต่ในระดับมัธยมปลายหรือฟิสิกส์ทั่วไป1 มักไม่กล่าวถึงวิธีนี้

ภาคผนวก ง.

การใส่เครื่องหมายบวกและลบของแรงและทอร์กในการเขียนกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเมื่อใช้พิกัดช่วยในการคำนวณ

เราจะเริ่มจากการพิจารณากฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองแบบเลื่อนที่กันก่อน กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองเมื่อเขียนโดยใช้เวกเตอร์ คือ $\sum \bar{F}_{ext} = m\bar{a}_{CM}$ การเขียนแบบนี้เป็นการเขียนในเชิงบรรยาย เมื่อเราจะทำการลงมือคำนวณนั้นอาจแบ่งวิธีการเขียนกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองออกได้เป็น 2 วิธี แม้ว่าวิธีทั้งสองจะมีพื้นฐานเดียวกันแต่การแบ่งน่าจะทำให้นักศึกษาเข้าใจดีขึ้น

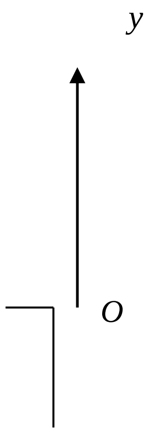
วิธีแรกเป็นการคำนวณระดับมัธยมปลายหรือฟิสิกส์ทั่วไป 1 เราเขียนความเร่งเป็น a โดยไม่เขียนเป็นอนุพันธ์ของพิกัดเทียบกับเวลา จากนั้นก็ดูในแนวที่เหมาะสมเช่นแนวดิ่ง หรือแนวระดับ หรือแนวตามพื้นเอียง เป็นต้น กำหนดทิศที่เป็นบวกซึ่งจะเป็นทิศใดก็ได้ (แต่นิยมกำหนดทิศที่เป็นบวกตามทิศของความเร่งหรือองค์ประกอบของความเร่ง) แล้วเขียนเครื่องหมายของแรงให้สอดคล้องกับทิศ ตัวอย่างเช่นดูในแนวของพื้นเอียง ถ้ากำหนดให้ทิศลงตามพื้นเอียงเป็นบวก แรงที่มีทิศชี้ลงตามพื้นเอียงก็จะมีเครื่องหมายบวก แรงที่มีทิศชี้ขึ้นตามพื้นเอียงก็จะมีเครื่องหมายลบ เป็นต้น วิธีนี้มักใช้กับปัญหาง่ายๆ

วิธีที่สองคือใช้พิกัดในการช่วยคำนวณซึ่งมักใช้ในปัญหาที่ซับซ้อน เราเขียนความเร่งเป็นอนุพันธ์ของพิกัดเทียบกับเวลา (มักเป็นอนุพันธ์อันดับสอง) ทิศที่เป็นบวกจะถูกกำหนดตามทิศของเวกเตอร์หน่วยของพิกัดซึ่งกำหนดจากทิศที่พิกัดเพิ่มขึ้น เครื่องหมายของแรงจะถูกเขียนให้สอดคล้องกับทิศที่เป็นบวก เช่นถ้าแรงมีทิศเดียวกับทิศที่เป็นบวกเครื่องหมายก็เป็นบวก ถ้าสวนทิศก็มีเครื่องหมายเป็นลบ กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองที่เขียนนี้บางทีเรียกว่าสมการการเคลื่อนที่ การเขียนสมการการเคลื่อนที่ไม่จำเป็นต้องเขียนจากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองแต่เพียงอย่างเดียว ในวิชากลศาสตร์ที่สูงขึ้นอาจเขียนจากสมการของ Lagrange หรืออาจเขียนจากสมการของ Hamilton หรืออื่นๆ สมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของพิกัดเทียบกับเวลา ในบางปัญหาเราก็หยุดอยู่เพียงแค่การเขียนสมการการเคลื่อนที่ แต่ในบางปัญหาก็ต้องแก้สมการการเคลื่อนที่โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้นที่โจทย์กำหนด เครื่องหมายของสมการการเคลื่อนที่อาจแตกต่างกันถ้าเราใช้ทิศที่เป็นบวกของพิกัดต่างกัน แต่เมื่อแก้สมการโดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้นแล้ว คำตอบจะให้ความหมายทางฟิสิกส์เหมือนกัน

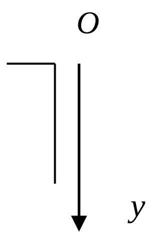
เพื่อความเข้าใจจะใช้ตัวอย่างง่ายๆ คือตัวอย่างที่ ง.1 กับ ง.2

ตัวอย่างที่ ง1. ขว้างก้อนหินมวล m ขึ้น(หรือลง)ในแนวดิ่งจากหน้าผา จงเขียนกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองโดยใช้พิกัด y ที่มีจุดกำเนิดที่หน้าผา เมื่อกำหนดให้ ก) y ที่เพิ่มขึ้นมีทิศชี้ขึ้น ข) y ที่เพิ่มขึ้นมีทิศชี้ลง

<u>วิธีทำ</u> ความเร่งในรูปทั่วไปคือ $\ddot{y}\,\hat{j}$ และไม่ว่าก้อนหินจะอยู่ที่ตำแหน่งใด เคลื่อนที่ขึ้นหรือลง เร็วขึ้นหรือช้าลง แรงที่ทำต่อก้อนหินคือแรงดึงดูดของโลกขนาดเป็น mg ทิศชี้ลง



รูป ต.ย.ง.1 ก.



ข.

ก) y ที่เพิ่มขึ้นมีทิศชี้ขึ้น เวกเตอร์หน่วย $\hat{j}$ มีทิศชี้ขึ้น ดังรูป ต.ย.ง.1ก. เรามักกล่าวอีกอย่างว่าให้ทิศชี้ขึ้นเป็นบวก

จะได้ $$-mg\,\hat{j} = m\ddot{y}\,\hat{j}$$

เรามักเขียนโดยละเวกเตอร์หน่วย เป็น $$-mg = m\ddot{y} \qquad (ง.1.1)$$

ข) y ที่เพิ่มขึ้นมีทิศชี้ลง เวกเตอร์หน่วย $\hat{j}$ มีทิศชี้ลง ดังรูป ต.ย.ง.1ข. เรามักกล่าวอีกอย่างว่าให้ทิศลงเป็นบวก

จะได้ $$mg\,\hat{j} = m\ddot{y}\,\hat{j}$$

เรามักเขียนโดยละเวกเตอร์หน่วย เป็น $$mg = m\ddot{y} \qquad (ง.1.2)$$

สมการ(ง.1.1) และ(ง.1.2) คือสมการการเคลื่อนที่ของก้อนหิน

จะเห็นว่า สมการการเคลื่อนที่(ง.1.1) และ(ง.1.2) คล้ายกันแต่ไม่เหมือนกัน(แต่เทียบเท่ากัน) บางครั้งเราก็หยุดเพียงแค่นี้ คือหยุดเพียงแค่การเขียนสมการ แต่บางครั้งเราก็ทำต่อในขั้นตอนการแก้สมการ เพื่อให้นักศึกษามองภาพออกจะใช้ตัวอย่างที่ ง.2 เพื่อให้เห็นวิธีการแก้สมการ โดยเป็นวิธีการแก้สมการด้วยวิธีอย่างง่ายคือแก้ด้วยการอินทิเกรตโดยตรง ในหลายๆปัญหาอาจใช้วิธีนี้ไม่ได้เพราะอินทิเกรตไม่ออก ก็ต้องใช้วิธีอื่นในการแก้สมการ ตัวอย่างเช่นใช้วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ ง2. จงใช้พิกัดในข้อ ก) และ ข) ในตัวอย่างที่ ง.1 เพื่อแสดงว่าถ้าขว้างก้อนหินมวล m <u>ขึ้น</u>ในแนวดิ่งจากหน้าผาด้วยอัตราเร็วต้น 5 เมตร/วินาที เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที ก) ก้อนหินอยู่ที่ใด ข) กำลังเคลื่อนที่ขึ้นหรือลงด้วยอัตราเร็วเท่าใด ค)กำลังเคลื่อนที่เร็วขึ้นหรือช้าลง

<u>วิธีทำ</u> 1. เมื่อเลือกทิศชี้ขึ้นเป็นบวก

$$\ddot{y}=-g \rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt}=-g \rightarrow d\dot{y}=-g\,dt$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง $\dot{y}=-g\,t+C_1$

ที่ $t=0 \rightarrow \dot{y}=+5\,m/s \rightarrow \therefore C_1=5\,m/s$

$$\therefore \dot{y}=\frac{dy}{dt}=-g\,t+5$$

ที่ $t=1 \rightarrow \dot{y}=-9.8(1)+5=-4.8\,m/s$

เมื่อเทียบกับพิกัดชี้ขึ้นเป็นบวก ความเร็วเป็นลบคือกำลังเคลื่อนที่ลง โดยลงด้วยอัตราเร็ว 4.8 เมตร/วินาที <u>คำตอบข้อ ข.</u>

ความเร่งของก้อนหินคือ $-9.8\,m/s^2$ ทิศของความเร็วและความเร่งอยู่ในทิศเดียวกัน(เครื่องหมายเหมือนกัน) ดังนั้นก้อนหินกำลังเคลื่อนที่เร็วขึ้น <u>คำตอบข้อ ค.</u>

$$\because \dot{y}=\frac{dy}{dt}=-g\,t+5 \rightarrow dy=(-gt+5)\,dt$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง $y=-\frac{1}{2}gt^2+5t+C_2$

ที่ $t=0\rightarrow y=0\rightarrow\therefore C_2=0$

$\therefore y=-\frac{1}{2}gt^2+5t$

ที่ $t=1\rightarrow y=-\frac{1}{2}(9.8)(1^2)+5(1)=+0.1m$

เมื่อเทียบกับพิกัดชี้ขึ้นเป็นบวก y ที่เป็นบวกคืออยู่เหนือหน้าผา เป็นระยะทาง 0.1 เมตร <u>คำตอบข้อก.</u>

2.เมื่อเลือกทิศชี้ลงเป็นบวก

$\ddot{y}=g\rightarrow\frac{d\dot{y}}{dt}=g\rightarrow d\dot{y}=g\,dt$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง $\dot{y}=gt+C_3$

ที่ $t=0\rightarrow\dot{y}=-5m/s\rightarrow\therefore C_3=-5m/s$

$\therefore\dot{y}=\frac{dy}{dt}=gt-5$

ที่ $t=1\rightarrow\dot{y}=9.8(1)-5=+4.8m/s$

เมื่อเทียบกับพิกัดชี้ลงเป็นบวก ความเร็วเป็นบวกคือกำลังเคลื่อนที่ลง โดยลงด้วยอัตราเร็ว 4.8 เมตร/วินาที <u>คำตอบข้อ ข.</u>

ความเร่งของก้อนหินคือ $+9.8m/s^2$ ทิศของความเร็วและความเร่งอยู่ในทิศเดียวกัน(เครื่องหมายเหมือนกัน) ดังนั้นก้อนหินกำลังเคลื่อนที่เร็วขึ้น <u>คำตอบข้อ ค.</u>

$\because\dot{y}=\frac{dy}{dt}=gt-5\rightarrow dy=(gt-5)\,dt$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง $y=\frac{1}{2}gt^2-5t+C_4$

ที่ $t=0\rightarrow y=0\rightarrow\therefore C_4=0$

$\therefore y = \frac{1}{2} g t^2 - 5t$

ที่ $t = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}(9.8)(1^2) - 5(1) = -0.1m$

เมื่อเทียบกับพิกัดชี้ลงเป็นบวก y ที่เป็นลบคืออยู่เหนือหน้าผา เป็นระยะทาง 0.1 เมตร <u>คำตอบข้อก.</u>

นักศึกษาจะเห็นว่าไม่ว่าเราจะเลือกพิกัดอย่างไรฟิสิกส์(อยู่เหนือหน้าผาหรือต่ำกว่าหน้าผาเป็นระยะเท่าใด กำลังเคลื่อนที่ขึ้นหรือลงด้วยอัตราเร็วเท่าใด กำลังเร็วขึ้นหรือช้าลง)ยังคงเหมือนเดิม เพียงแต่เราจะต้องแปลความหมายของเครื่องหมายบวกลบให้สอดคล้องกับพิกัดที่เราใช้ นักศึกษาพึงสนใจความหมายของความเร่งที่มีเครื่องหมายลบเป็นพิเศษ ควรระลึกว่าความเร่งที่ติดลบไม่ได้แปลว่าคือความหน่วง

คราวนี้มาดูกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองในกรณีการ<u>หมุนในระนาบ</u>บ้าง สมการเชิงบรรยายคือ $\tau = I\alpha$ ในการคำนวณนั้นวิธีแรกสำหรับปัญหาง่ายๆระดับมัธยมปลายหรือฟิสิกส์ทั่วไป 1 เราเขียนความเร่งเชิงมุมเป็น α โดยไม่เขียนเป็นอนุพันธ์ของพิกัดเทียบกับเวลา เรามักดูว่าทอร์กตามเข็มนาฬิกา(คือทอร์กที่มีทิศที่พุ่งเข้าไปในกระดาษ)กับทอร์กทวนเข็มนาฬิกา(คือทอร์กที่มีทิศที่พุ่งออกจากกระดาษ)อันไหนมากกว่ากัน อันไหนมากกว่าก็ให้อันนั้นเป็นบวกอีกอันก็เป็นลบ

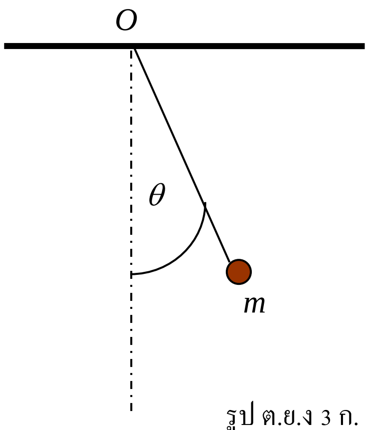
วิธีที่สองเป็นวิธีที่เราเขียนรูปมุมที่วัตถุหมุน(เทียบกับแนวอ้างอิงคงที่) ความเร่งเชิงมุมคืออนุพันธ์อันดับสองของมุมเทียบกับเวลา เราสามารถพิจารณามุมที่วัตถุ<u>หมุนในระนาบ</u>เป็นเวกเตอร์ได้(ถ้าไม่ใช่การหมุนในระนาบ มุมไม่ใช่เวกเตอร์ เพราะไม่ประพฤติตัวตามกฎการบวกแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน ยกเว้นมุมที่เล็กมากจนย่างเข้าสู่ศูนย์) โดยขนาดของเวกเตอร์คือขนาดของมุม ส่วนทิศ(ที่เป็นบวก)เราตกลงให้เป็นไปตามกฎมือขวา คือกำมือขวาให้นิ้วทั้งสี่ไปตามเมื่อมุมมากขึ้น หัวแม่มือจะชี้ทิศที่เป็นบวก ทิศที่เป็นบวกจะเป็นไปได้ 2 อย่างเท่านั้น คือพุ่งออกจากกระดาษเป็นบวก หรือไม่ก็พุ่งเข้าไปในกระดาษเป็นบวก ที่เป็นเช่นนี้เพราะในกรณีการหมุนในระนาบนั้นแนวที่ตรงประเด็นในการบรรยายการหมุนคือแนวของความเร็วเชิงมุม(ที่ผ่านมาเราใช้แกน z) เมื่อเขียนรูปฉายของวัตถุแนวนี้จะตั้งฉากกับระนาบของกระดาษ เมื่อรู้ทิศที่เป็นบวกจากกฎมือขวาแล้วเครื่องหมายบวกหรือลบของทอร์กเราก็ใส่ให้สอดคล้องกับทิศ

ตัวอย่างที่ ง.3 เป็นตัวอย่างของการเขียนกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองแบบหมุนในระนาบเมื่อเขียนรูปมุมที่หมุน

ตัวอย่างที่ ง3. ลูกตุ้มนาฬิกามวล m ห้อยด้วยเชือกยาว L กับเพดาน ลูกตุ้มแกว่งในระนาบดิ่ง จงเขียนกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองแบบหมุน (สมการการเคลื่อนที่) ของลูกตุ้มนี้

<u>วิธีทำ</u> มองทั้งลูกตุ้มและเชือกรวมกันเป็นวัตถุ เส้นเชือกก็คือเส้นตรงบนวัตถุ

ก)ให้ θ เป็นมุมที่เชือกทำกับแนวดิ่งดังรูป 1 ดังรูป ต.ย.ง.3ก แนวดิ่งในที่นี้คือแนวอ้างอิงคงที่(อยู่นอกวัตถุ) เมื่อมุม θ มากขึ้น การหมุนของวัตถุเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา เมื่อกำมือขวาให้นิ้วทั้งสี่ไปตามการหมุน หัวแม่มือจะชี้ทิศพุ่งออกจากกระดาษ นั่นคือทิศที่เป็นบวกคือทิศพุ่งออกจากกระดาษ

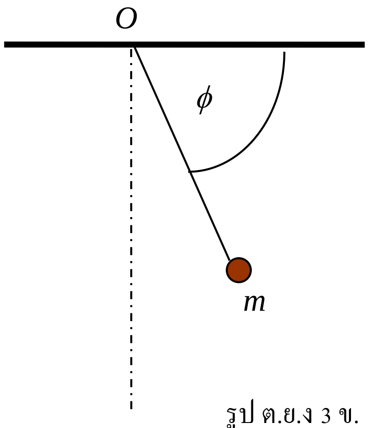


รูป ต.ย.ง 3 ก.

ทอร์กของ mg เทียบกับจุด O มีขนาด $mgL\sin\theta$ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ

ดังนั้น
$$-mgL\sin\theta = I\ddot{\theta} = mL^2\ddot{\theta} \qquad (ง.3.1)$$ <u>ตอบ</u>

ข)ให้ ϕ เป็นมุมที่เชือกทำกับแนวระดับดังรูป ต.ย.ง.3ข แนวระดับในที่นี้คือแนวอ้างอิงคงที่(อยู่นอกวัตถุ) เมื่อมุม ϕ มากขึ้น การหมุนของวัตถุเป็นการหมุนตามเข็มนาฬิกา เมื่อกำมือขวาให้นิ้วทั้งสี่ไปตามการหมุน หัวแม่มือจะชี้ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ นั่นคือทิศที่เป็นบวกคือทิศพุ่งเข้าไปในจากกระดาษ



รูป ต.ย.ง 3 ข.

ทอร์กของ mg เทียบกับจุด O มีขนาด $mgL\cos\phi$ ทิศพุ่งเข้าไปในกระดาษ

ดังนั้น $mgL\cos\phi = I\ddot{\phi} = mL^2\ddot{\phi}$ (ง.3.2) ตอบ

สมการ(ง.3.1) และ (ง.3.2) คือสมการการเคลื่อนที่ของลูกตุ้ม เราจะหยุดเพียงแค่ขั้นตอนของการเขียนสมการ โดยไม่ทำการแก้สมการ

จะเห็นว่า(ง.3.1) และ(ง.3.2)เป็นสมการเดียวกัน เพราะ $\phi = 90^0 - \theta \rightarrow \cos\phi = \sin\theta \rightarrow \ddot{\phi} = -\ddot{\theta}$

เมื่อแทนลงในสมการ(ง.3.2) จะได้สมการ(ง.3.1)

หมายเหตุ การเขียนสมการการเคลื่อนที่ของการหมุนในระนาบโดยใช้หลักการดังในตัวอย่างที่ ง.3 นี้ ผู้เขียนไม่แน่ใจว่าเป็นหลักการทั่วไปหรือไม่ แต่ผู้เขียนใช้การมองแบบนี้ในการเขียนสมการ คนอื่นอาจใช้การมองแบบอื่นในการเขียนสมการ